Klauselmengen

Definition 2.38

Sei

$$\alpha = (p_{11} \vee \ldots \vee p_{1k_1}) \wedge \ldots \wedge (p_{n1} \vee \ldots \vee p_{nk_n})$$

eine in aussagenlogische Formel in KNF.

Dann heißen die Mengen $\{p_{i1}, \ldots, p_{ik_i}\}, 1 \leq i \leq n$, der jeweils disjunktiv verknüpften Literale die Klauseln von α und die Menge

$$M_\alpha = \{\{p_{11}, \ldots, p_{1k_1}\}, \ldots, \{p_{n1}, \ldots, p_{nk_n}\}\}$$

ihrer Klauseln heißt Klauselmenge von α.

Klauseln, die eine Variable und ihre Negation enthalten, heißen trivial.

Um leere Klauseln von leeren Klauselmengen zu unterscheiden, notieren wir erstere mit dem Symbol $\diamond$ und letztere wie üblich mit dem Symbol $\emptyset$.

Beispiel 2.39

Für die Formel

$$\alpha = (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

in KNF ergibt sich die Klauselmenge

$$M_\alpha = \{\{\neg p, q, r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q, \neg r\}\}.$$

Satz 2.40

(i) *Die leere Klausel $\diamond$ ist unerfüllbar.*

(ii) *Die leere Klauselmenge $\emptyset$ ist allgemeingültig.*

(iii) *Sei M eine Klauselmenge und K eine triviale Klausel mit $K \in M$. Dann gilt $M \equiv M \setminus \{K\}$.*

Beweis.

(i) Eine Klausul ist erfüllbar, wenn es eine Belegung $\mathcal{I}$ gibt, die mindestens ein Literal wahr macht.

Da die leere Klausel aber kein Literal enthält, kann auch keines wahr gemacht werden.

(ii) Eine Klauselmenge ist allgemeingültig, wenn jede Belegung der Variablen jede Klausel wahr macht.

Da die leere Klauselmenge keine Klauseln enthält, müssen auch keine Klauseln wahr gemacht werden.

(iii) Eine triviale Klausel ist eine Tautologie.

Resolution: einführendes Beispiel

Beispiel 2.41

Es sei

$$\alpha = (p \vee q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s)$$

und damit

$$M_\alpha = \{\{p, q, \neg r\}, \{r, \neg s\}\}.$$

Ist α bzw. M_α erfüllbar?

- M_α ist genau dann erfüllbar, wenn $K_1 = \{p, q, \neg r\}$ und $K_2 = \{r, \neg s\}$ erfüllbar sind.
- r tritt in K_1 negiert und in K_2 nicht negiert auf.
- Gilt $\mathcal{I}(r) = 1$, dann kann K_1 nur durch p oder q erfüllt werden, also $\mathcal{I}(p) = 1$ oder $\mathcal{I}(q) = 1$.
- Gilt $\mathcal{I}(r) = 0$, dann kann K_2 nur durch $\mathcal{I}(s) = 0$ erfüllt werden.
- Also muss auf jeden Fall $p \vee q \vee \neg s$ gelten.

Resolution basiert auf der Tautologie:

$$((\alpha \to \beta) \land (\neg\alpha \to \gamma)) \to (\beta \lor \gamma)$$

Anschauliches Beispiel:

- Wenn die Sonne scheint, gehe ich ins Schwimmbad.
- Wenn nicht die Sonne scheint, gehe ich ins Kino.
- Also gehe ich ins Schwimmbad oder ins Kino.

Definition der Resolution

Definition 2.42

Die Resolution erfolgt mithilfe der Inferenzregel

$$\frac{p_1 \vee \ldots \vee p_m \vee r, q_1 \vee \ldots \vee q_n \vee \neg r}{p_1 \vee \ldots \vee p_m \vee q_1 \vee \ldots \vee q_n}$$

oder in „Klauselnotation“

$$\frac{\overbrace{\{p_1, \ldots, p_m, r\}}^{=K_1}, \overbrace{\{q_1, \ldots, q_n, \neg r\}}^{=K_2}}{\underbrace{\{p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n\}}_{=K}}.$$

K heißt Resolvente von K_1 und K_2. Schreibweise: $K = \mathrm{Res}(K_1, K_2)$.
r und $\neg r$ heißen passende Literale.

Beispiel 2.43

(i) Es seien $K_1 = \{p, q, \neg r\}$ und $K_2 = \{r, \neg s\}$ die beiden Klauseln aus Beispiel 2.41. Dann ist

$$\mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{p, q, \neg s\}$$

die einzige Resolvente von K_1 und K_2.

(ii) Für $K_1 = \{p, \neg q, r\}$ und $K_2 = \{q, \neg r\}$ sind

$$\mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{p, r, \neg r\} \text{ und } \mathrm{Res}(K_2, K_1) = \{p, q, \neg q\}$$

mögliche Resolventen.

(iii) Die Resolvente der Klauseln $K_1 = \{p\}$ und $K_2 = \{\neg p\}$ ist die leer:

$$\mathrm{Res}(K_1, K_2) = \diamond.$$

Resolutionslemma

Satz 2.44

Seien $\alpha \in \mathcal{A}$ *in KNF,* $K_1, K_2 \in M_\alpha$ *Klauseln von* α *und* $K = \text{Res}(K_1, K_2)$ *eine Resolvente von* K_1 *und* K_2*.*

Dann gilt:

$$M_\alpha \equiv M_\alpha \cup \{K\}$$

Anschauliche Interpretation:

- Die Hinzunahme von Resolventen einer Klauselmenge ändert nicht die Semantik der Klauselmenge.

Beweis.

Es sei β die aussagenlogische Formel, die der Klauselmenge $M_\alpha \cup \{K\}$ entspricht. Wir müssen dann zeigen, dass

$$\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta)$$

für alle Belegungen $\mathcal{I}$ gilt.

- Sei $\mathcal{I}$ eine Belegung mit $\mathcal{I}^*(\alpha) = 0$.
  Dann wird eine Klausel von M_α nicht erfüllt.
  Diese Klausel ist aber auch in $M_\alpha \cup \{K\}$ und damit in β enthalten.
  Also gilt auch $\mathcal{I}^*(\beta) = 0$.
- Sei $\mathcal{I}$ eine Belegung mit $\mathcal{I}^*(\alpha) = 1$.
  D. h. $\mathcal{I}$ erfüllt alle Klauseln von M_α, insbesondere K_1 und K_2.
  Wegen $\{K_1, K_2\} \models K$ erfüllt $\mathcal{I}$ dann auch die Klausel K.
  Also erfüllt $\mathcal{I}$ alle Klauseln von $M_\alpha \cup \{K\}$.
  Damit gilt $\mathcal{I}^*(\beta) = 1$.

Fortgesetzte Anwendung des Resolutionsoperators

Definition 2.45

Sei M_α die Klauselmenge von $\alpha \in \mathcal{A}$ in KNF. Dann sei

$$\mathrm{Res}(M_\alpha) = M_\alpha \cup \{\mathrm{Res}(K_1, K_2) | K_1, K_2 \in M_\alpha\}.$$

Wir wenden nun den Operator Res wiederholt auf M_α an und definieren damit:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Res}^0(M_\alpha) & = & M_\alpha \\ \mathrm{Res}^{n+1}(M_\alpha) & = & \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(M_\alpha)), n \geq 0 \end{array}$$

Folgerung 2.46

(i) $M_\alpha \equiv \mathrm{Res}^i(M_\alpha)$ *für alle* $i \geq 0$.

(ii) $\mathrm{Res}^i(M_\alpha) \equiv \mathrm{Res}^j(M_\alpha)$ *für alle* $i, j \geq 0$.

Beispiel 2.47

Wir betrachten die Formel

$$\alpha = (\neg r \vee p \vee q) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p)$$

Es ist also $M_\alpha = \{\{p, q, \neg r\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}\}$ und es gilt

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Res}(M_\alpha) & = & \{\{\{p, q, \neg r\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{p, r\}\} \\
\mathrm{Res}^2(M_\alpha) & = & \mathrm{Res}(\mathrm{Res}(M_\alpha)) \\
 & = & \{\{\{p, q, \neg r\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{p, r\}, \{p\}\} \\
\mathrm{Res}^3(M_\alpha) & = & \mathrm{Res}(\mathrm{Res}(\mathrm{Res}(M_\alpha))) \\
 & = & \{\{\{p, q, \neg r\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{p, r\}, \{p\}\}
\end{array}$$

Also $\mathrm{Res}^3(M_\alpha) = \mathrm{Res}^2(M_\alpha)$ und damit $\mathrm{Res}^l(M_\alpha) = \mathrm{Res}^2(M_\alpha)$ für alle $l \geq 2$.

Satz 2.48

Sei M_α die Klauselmenge von $\alpha \in \mathcal{A}$ in KNF.
Dann gibt es ein $t \in \mathbb{N}_0$, so dass $\mathrm{Res}^t(M_\alpha) = \mathrm{Res}^l(M_\alpha)$ ist für alle $l \geq t$.

Definition 2.49

Die Klauselmenge $\mathrm{Res}^t(M_\alpha)$ aus Satz 2.48 bezeichnen wir mit $\mathrm{Res}^*(M_\alpha)$.

Beispiel 2.50

In Beispiel 2.47 gilt $\mathrm{Res}^*(M_\alpha) = \mathrm{Res}^2(M_\alpha)$.

Folgerung 2.51

Sei M_α die Klauselmenge von $\alpha \in \mathcal{A}$ in KNF, dann ist

(i) $M_\alpha \equiv \mathrm{Res}^*(M_\alpha)$

(ii) *M_α (un-)erfüllbar genau dann, wenn $\mathrm{Res}^*(M_\alpha)$ (un-)erfüllbar ist.*

Beispiel 2.52

Für die Formel

$$\alpha = (p \vee q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q)$$

mit der Klauselmenge

$$M_\alpha = \{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}\}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(M_\alpha) &= \{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}, \\
&\qquad \{q, \neg r\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{q, r\}, \{\neg q\}, \{p, r\}\} \\
\mathrm{Res}^2(M_\alpha) &= \{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}, \\
&\qquad \{q, \neg r\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{q, r\}, \{\neg q\}, \{p, r\} \\
&\qquad \{q\}, \{\neg r\}, \{r\}, \{p\}\}
\end{aligned}$$

Es folgt $\diamond \in \mathrm{Res}^3(M_\alpha)$. Damit ist M_α unerfüllbar.

Resolutionssatz der Aussagenlogik

Satz 2.53

Sei M_α die Klauselmenge von $\alpha \in \mathcal{A}$ in KNF.

Dann gilt: M_α (und damit α) ist unerfüllbar genau dann, wenn $\diamond \in \text{Res}^*(M_\alpha)$ ist.

Anschauliche Interpretation:

- Die Konstruktion von $\text{Res}^*(M_\alpha)$ entspricht einem vollständigen und korrekten Kalkül.

Resolutionsverfahren

Der Resolutionssatz ist die Grundlage für das Resolutionsverfahren:
Gegeben sei eine Formel $\alpha \in \mathcal{A}$ in KNF.

1. Bilde die Klauselmenge M_α.
2. Wende den Resolutionsoperator Res fortgesetzt auf M_α an, bis ein t erreicht ist mit $\mathrm{Res}^l(M_\alpha) = \mathrm{Res}^t(M_\alpha)$ für alle $l \geq t$. Solch ein t existiert gemäß Satz 2.48.

   Anders ausgedrückt: bilde $\mathrm{Res}^*(M_\alpha)$.
3. Falls $\diamond \in \mathrm{Res}^*(M_\alpha)$ ist, dann ist α unerfüllbar, sonst erfüllbar.

Deduktion der leeren Klausel

Definition 2.54

Eine Deduktion der leeren Klausel aus einer Klauselmenge $M_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ in KNF, ist eine Folge $K_1, K_2, \ldots, K_t$ von Klauseln, so dass gilt:

(i) K_t ist die leere Klausel und

(ii) $K_i, 1 \leq i \leq t$, ist entweder eine Klausel aus M_α oder eine Resolvente von Klauseln $K_r, K_s (K_i = \text{Res}(K_r, K_s))$ mit $r, s \leq i$.

Aus dem Resolutionssatz folgt unmittelbar:

Folgerung 2.55

Eine Formel $\alpha \in \mathcal{A}$ in KNF ist unerfüllbar genau dann, wenn eine Deduktion der leeren Klausel aus M_α möglich ist.

Beispiel 2.56

Wir betrachten wieder die Formel

$$\alpha = (p \vee q \vee \neg r) \wedge \neg p \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q)$$

Es ist also $M_\alpha = \{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}\}$.

$$\begin{array}{rcl}
K_1 & = & \{p, q, \neg r\} \\
K_2 & = & \{p, q, r\} \\
K_3 & = & \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{p, q\} \\
K_4 & = & \{p, \neg q\} \\
K_5 & = & \mathrm{Res}(K_3, K_4) = \{p\} \\
K_6 & = & \{\neg p\} \\
K_7 & = & \mathrm{Res}(K_5, K_6) = \diamond
\end{array}$$

Resolutionsgraph

Eine Deduktion können wir mithilfe eines Resolutionsgraphen darstellen.

Beispiel 2.57

Resolutionsgraph für die Deduktion von Beispiel 2.56:

$$
\begin{tikzcd}
\{p, q, \neg r\} \arrow[dr] & & \{p, q, r\} \arrow[dl] & & \\
& \{p, q\} \arrow[dr] & & \{p, \neg q\} \arrow[dl] & \\
& & \{p\} \arrow[dr] & & \{\neg p\} \arrow[dl] \\
& & & \diamond &
\end{tikzcd}
$$

Zusammenfassung

- Aussagenlogik als formale Sprache: Syntax und Semantik durch Belegung $\mathcal{I}$ und Interpretationsfunktion $\mathcal{I}^*$.
- Logische Folgerung $\mathcal{F} \models \alpha$: Jedes Modell für $\mathcal{F}$ ist auch ein Modell für α.
- Syntaktische Folgerung $\mathcal{F} \vdash \alpha$: α ist mittels Inferenzregeln aus $\mathcal{F}$ herleitbar.
- Konjunktive Normalform sowie Klauselmengen als kanonische Darstellung von Formeln.
- Resolutionskalkül: Syntaktische Ableitung auf der Basis von Klauseln.
- Das Resolutionskalkül ist korrekt und vollständig.