Logische Äquivalenz

Definition 2.22

Zwei aussagenlogische Formeln $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ heißen logisch äquivalent, falls für jede Belegung $\mathcal{I}$ von α und β gilt:

$$\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta).$$

Schreibweise: $\alpha \equiv \beta$.

Beispiel 2.23

Aus Folgerung 2.6 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\alpha \rightarrow \beta &\equiv \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \\
\alpha \oplus \beta &\equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)
\end{aligned}$$

Wichtige aussagenlogische Äquivalenzen

Satz 2.24

Kommutativität

$$
\begin{aligned}
\alpha \vee \beta &\equiv \beta \vee \alpha \\
\alpha \wedge \beta &\equiv \beta \wedge \alpha \\
\alpha \oplus \beta &\equiv \beta \oplus \alpha \\
\alpha \leftrightarrow \beta &\equiv \beta \leftrightarrow \alpha
\end{aligned}
$$

Assoziativität

$$
\begin{aligned}
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) &\equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &\equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) &\equiv (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma \\
\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) &\equiv (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Satz.

Distributivität

$$\begin{aligned} \alpha \lor (\beta \land \gamma) &\equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma) \\ \alpha \land (\beta \lor \gamma) &\equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma) \end{aligned}$$

De Morgansche Regeln

$$\begin{aligned} \neg(\alpha \lor \beta) &\equiv \neg\alpha \land \neg\beta \\ \neg(\alpha \land \beta) &\equiv \neg\alpha \lor \neg\beta \end{aligned}$$

Einführung der Negation

$$\begin{aligned} \neg\alpha &\equiv \alpha \rightarrow 0 \\ \neg\alpha &\equiv \alpha \leftrightarrow 0 \\ \neg\alpha &\equiv \alpha \oplus 1 \end{aligned}$$

Fortsetzung Satz.

Doppelte Negation

$$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$$

Idempotenz

$$\begin{aligned} \alpha \vee \alpha &\equiv \alpha \\ \alpha \wedge \alpha &\equiv \alpha \end{aligned}$$

Absorption

$$\begin{aligned} 1 \wedge \alpha &\equiv \alpha \\ 0 \vee \alpha &\equiv \alpha \\ 1 \rightarrow \alpha &\equiv \alpha \\ 1 \leftrightarrow \alpha &\equiv \alpha \\ \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) &\equiv \alpha \\ \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) &\equiv \alpha \end{aligned}$$

Fortsetzung Satz.

Tautologien

$$
\begin{aligned}
1 \vee \alpha &\equiv 1 \\
\neg\alpha \vee \alpha &\equiv 1 \\
\alpha \rightarrow \alpha &\equiv 1 \\
\alpha \rightarrow 1 &\equiv 1 \\
0 \rightarrow \alpha &\equiv 1 \\
\alpha \leftrightarrow \alpha &\equiv 1
\end{aligned}
$$

Unerfüllbarkeitsregeln

$$
\begin{aligned}
0 \wedge \alpha &\equiv 0 \\
\neg\alpha \wedge \alpha &\equiv 0 \\
\alpha \oplus \alpha &\equiv 0
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Satz.

Kontraposition

$$\alpha \to \beta \quad \equiv \quad \neg\beta \to \neg\alpha$$

Beweis.

Tafel ✎ und Übungsaufgabe.

Äquivalenz

Definition 2.25

Gilt für aussagenlogische Formeln α und β, dass die Bijunktion $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie ist, dann heißt diese Bijunktion Äquivalenz, und wir schreiben

$$\alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Satz 2.26

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ aussagenlogische Formeln, dann gilt

$$\alpha \equiv \beta \text{ genau dann, wenn } \alpha \Leftrightarrow \beta$$

gilt.

Beweis.

Tafel ✎.

Folgerung 2.27

Eine aussagenlogische Formel $\alpha \in \mathcal{A}$ ist allgemeingültig genau dann, wenn

$$\alpha \equiv 1$$

oder

$$\alpha \Leftrightarrow 1$$

gilt.

NAND und NOR

Wir kennen bisher fünf zweistellige Verknüpfungen:

$$\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$$

Wir führen noch zwei weitere Verknüpfungen ein:

- $\alpha \uparrow \beta$ (NAND)
- $\alpha \downarrow \beta$ (NOR)

definiert durch

α	β	$\alpha \uparrow \beta$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

bzw.

α	β	$\alpha \downarrow \beta$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Folgerung 2.28

Für aussagenlogische Formeln $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ *gilt:*

(i)

$$\alpha \uparrow \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$$

(ii)

$$\alpha \downarrow \beta \equiv \neg(\alpha \vee \beta)$$

Beweis.

Tafel ✎.

Anzahl aussagenlogischer Verknüpfungen

Satz 2.29

Es gibt $2^{(2^n)}$ n-stellige aussagenlogische Verknüpfungen.

Beweis.

- Eine Wahrheitstafel mit n aussagenlogischen Variablen hat 2^n Zeilen.
- Für jede Zeile kann die Ergebnisspalte die zwei Werte 0 oder 1 annehmen.
- Anzahl an Möglichkeiten: $2^{\text{Anzahl Zeilen}} = 2^{(2^n)}$.

Folgerung 2.30

Es gibt $2^{(2^2)} = 16$ verschiedene zweistellige aussagenlogische Verknüpfungen.

Verknüpfungen durch andere Verknüpfungen ausdrücken

- Nicht alle der 16 zweistelligen Verknüpfungen werden benötigt, denn
- wir können Verknüpfungen durch andere Verknüpfungen ausdrücken.
- Finde eine minimale Anzahl an Verknüpfungen, mit denen alle anderen ausgedrückt werden können!

Beispiel 2.31

(i) Aus Folgerung 2.6 kennen wir

$$\begin{aligned} \alpha \to \beta &\equiv \neg\alpha \lor \beta \\ \alpha \leftrightarrow \beta &\equiv (\neg\alpha \lor \beta) \land (\neg\beta \lor \alpha) \\ \alpha \oplus \beta &\equiv (\alpha \land \neg\beta) \lor (\neg\alpha \land \beta) \end{aligned}$$

Subjunktion, Bijunktion und exklusives Oder sind also durch Negation, Disjunktion und Konjunktion darstellbar.

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Doppelte Negation und De Morgansche Regeln (siehe Satz 2.24) liefern:

$$\begin{array}{lclcl} \alpha \wedge \beta & \equiv & \neg\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \alpha \vee \beta & \equiv & \neg\neg(\alpha \vee \beta) & \equiv & \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \end{array}$$

Konjunktion lässt sich also durch Negation und Disjunktion, Disjunktion durch Negation und Konjunktion darstellen.

(iii) Idempotenz und Folgerung 2.28 liefern:

$$\neg\alpha \equiv \neg(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha \downarrow \alpha$$

Die Negation lässt sich also durch NOR ausdrücken.

(iv) Aus (ii) und (iii) ergibt sich mit Folgerung 2.28 (ii):

$$\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg\alpha \downarrow \neg\beta \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)$$

Die Konjunktion lässt sich also alleine durch NOR ausdrücken.

Aussagenlogische Basen

Es sei $\mathbb{B}^{(4)}$ die Menge aller zweistelligen aussagenlogischen Verknüpfungen und $\mathbb{B}^{(4)^*} = \mathbb{B}^{(4)} \cup \{\neg\}$ diese Menge einschließlich Negation.

Definition 2.32

Sei $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}^{(4)^*}$ eine Auswahl von aussagenlogischen Verknüpfungen.

(i) Eine zweistellige aussagenlogische Verknüpfung $\circ \in \mathbb{B}^{(4)}$ heißt definierbar durch $\mathcal{O}$ genau dann, wenn für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ gilt:
- Ist $\alpha \circ \beta \equiv \gamma$, dann
- sind γ und die Teilformeln α und β allein mit Operatoren aus $\mathcal{O}$ zusammengesetzt.

(ii) Die Menge $\mathcal{O}$ heißt aussagenlogische Basis, falls jede Verknüpfung aus $\mathbb{B}^{(4)^*}$ durch $\mathcal{O}$ definierbar ist.

Satz 2.33

Die folgenden Mengen aussagenlogischer Verknüpfungen bilden aussagenlogische Basen:

Boolsche Basis	$\{\neg, \vee, \wedge\}$
De Morgan-Basis	$\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \wedge\}$
Frege-Basis	$\{\neg, \rightarrow\}$
NOR-Basis	$\{\downarrow\}$
NAND-Basis	$\{\uparrow\}$

Gottlob Frege

Gottlob Frege (1848-1925) war ein deutscher Logiker, Mathematiker und Philosoph. Er gilt als Begründer der modernen Logik.

Seine herausragende Leistung auf dem Gebiet der Logik besteht darin, als erster eine formale Sprache und, damit zusammenhängend, formale Beweise entwickelt zu haben („Begriffsschrift“).

Er schuf dadurch eine wesentliche Grundlage für die Informatik, sowie für formale Methoden in der linguistischen Semantik.

Disjunktive und konjunktive Normalform

Definition 2.34

(i) Eine aussagenlogische Formel $\alpha \in \mathcal{A}$ ist in disjunktiver Normalform (DNF), falls gilt:

$$\alpha = \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$$

mit $\alpha_i = \alpha_{i1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik_i}$, $1 \leq i \leq n$, wobei alle $\alpha_{ij}, 1 \leq j \leq k_i$ Literale sind.

(ii) Eine aussagenlogische Formel $\alpha \in \mathcal{A}$ ist in konjunktiver Normalform (KNF), falls gilt:

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

mit $\alpha_i = \alpha_{i1} \vee \ldots \vee \alpha_{ik_i}$, $1 \leq i \leq n$, wobei alle $\alpha_{ij}, 1 \leq j \leq k_i$ Literale sind.

Die konjunktiv verknüpften Teilformeln α_i heißen Klauseln von α.

Eine Formel,

- in disjunktiver Normalform ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen,
- in konjunktiver Normalform ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen.

Beispiel 2.35

(i) Die Formel

$$(p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q) \lor (p \land q \land r) \lor (\neg q \land \neg r)$$

ist in disjunktiver Normalform.

(ii) Die Formel

$$(\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q) \land (\neg p \lor q \lor \neg r)$$

ist in konjunktiver Normalform.

Satz 2.36

(i) *Jede aussagenlogische Formel lässt sich in eine äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform transformieren.*

(ii) *Jede aussagenlogische Formel lässt sich in eine äquivalente aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform transformieren.*

Beweisskizze.

1. Ersetze jedes Vorkommen von 1 durch $p \vee \neg p$ und jedes Vorkommen von 0 durch $q \wedge \neg q$, mit zwei neuen Variablen p bzw. q.
2. Ersetze die Operatoren $\rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$ oder sonstige durch ihre Darstellung mit $\neg, \wedge, \vee$ (boolsche Basis).
3. Ersetze jedes Vorkommen einer Formel der Form $\neg\neg\alpha$ durch α.
4. Ziehe $\neg$ ganz nach innen bis $\neg$ nur noch vor Aussagenvariablen vorkommt. Wende dabei, falls möglich, auch (3) an.
5. Ziehe mit den Distributivgesetzen alle $\wedge$ nach aussen (KNF) bzw. nach innen (DNF).

Beispiel 2.37

$$
\begin{aligned}
((\alpha \to \beta) \to \gamma) \lor \delta &\equiv ((\neg\alpha \lor \beta) \to \gamma) \lor \delta \\
&\equiv (\neg(\neg\alpha \lor \beta) \lor \gamma) \lor \delta \\
&\equiv ((\alpha \land \neg\beta) \lor \gamma) \lor \delta \\
&\equiv ((\alpha \lor \gamma) \land (\neg\beta \lor \gamma)) \lor \delta \\
&\equiv (\alpha \lor \gamma \lor \delta) \land (\neg\beta \lor \gamma \lor \delta)
\end{aligned}
$$

Somit ist die Formel in KNF.