Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen

Klausur Wintersemester 2015/16

16. März 2015

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Hinweise:

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3+2+2+3=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$ ist eine Tautologie.

(b) Wenn $\alpha \to \beta$ eine Tautologie ist, dann gilt $\{\alpha\} \models \beta$.

(c) $\neg((p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q) \equiv p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n \land \neg q$

(d) Wenn $\alpha \land \beta$ erfüllbar ist, dann ist $\neg\alpha \lor \neg\beta$ unerfüllbar.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr, es handelt sich um die Tautologie des Kettenschlusses. Beweis mit Wahrheitstafel:

p	q	r	$\alpha_1 = p \to q$	$\alpha_2 = q \to r$	$\alpha_3 = p \to r$	$\alpha_1 \land \alpha_2 \to \alpha_3$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

(b) Die Aussage ist wahr. Beweis:

$$\begin{aligned}
\alpha \to \beta \text{ ist Tautologie} \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\alpha \lor \beta \text{ ist Tautologie} \\
&\Leftrightarrow \quad \neg(\neg\alpha \lor \beta) \text{ ist unerfüllbar} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha \land \neg\beta \text{ ist unerfüllbar} \\
&\Leftrightarrow \quad \{\alpha, \neg\beta\} \text{ ist unerfüllbar} \\
&\Leftrightarrow \quad \{\alpha\} \models \beta
\end{aligned}$$

(c) Die Aussage ist wahr. Beweis mittels logisch äquivalenter Umformungen:

$$\begin{aligned}
\neg((p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q) \quad &\equiv \quad \neg(\neg(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \lor q) \\
&\equiv \quad \neg\neg(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \land \neg q \\
&\equiv \quad p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n \land \neg q
\end{aligned}$$

(d) Die Aussage ist falsch.

Wenn $\alpha \land \beta$ erfüllbar ist, kann es trotzdem Belegungen geben, die $\alpha \land \beta$ falsch machen. Mit solch einer Belegung wird dann aber (wegen $\neg\alpha \lor \neg\beta \equiv \neg(\alpha \land \beta)$) die Formel $\neg\alpha \lor \neg\beta$ wahr, ist also erfüllbar.

Aufgabe 2 (4+6=10 Punkte)

Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \neg p \to (q \vee \neg r) \\
\alpha_2 &= \neg(\neg r \wedge \neg q) \\
\alpha_3 &= \neg p \to \neg q
\end{aligned}$$

(a) Überführen Sie die Formeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in KNF und geben Sie die zugehörigen Klauseln an.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution: $\mathcal{F} \models p$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\neg p \to (q \vee \neg r) &\equiv \neg\neg p \vee (q \vee \neg r) \equiv p \vee q \vee \neg r \\
\neg(\neg r \wedge \neg q) &\equiv \neg\neg r \vee \neg\neg q \equiv q \vee r \\
\neg p \to \neg q &\equiv \neg\neg p \vee \neg q \equiv p \vee \neg q
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Klauseln:

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \{p, q, \neg r\} \\
K_2 &:= \{q, r\} \\
K_3 &:= \{p, \neg q\}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach Satz 2.13:

$$\mathcal{F} \models p \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \cup \{\neg p\} \text{ ist unerfüllbar}$$

Wir zeigen die rechte Seite mittels Resolution. Dazu sei $K_4 := \{\neg p\}$. Wir leiten nun aus $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ die leere Klausel $\diamond$ ab:

$$\begin{aligned}
K_5 &:= \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{p, q\} \\
K_6 &:= \mathrm{Res}(K_5, K_3) = \{p\} \\
K_7 &:= \mathrm{Res}(K_6, K_4) = \diamond
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x\, \exists y P(x,y) \\
\alpha_2 &= \forall x\, \forall y\, P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x) \\
\alpha_3 &= P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge P(c,d) \wedge \neg P(d,b)
\end{aligned}$$

Das Universum sei $U = \{a,b,c,d\}$. Geben Sie ein Modell für die Formelmenge $\mathcal{F}$ an.

(b) Gegeben seien zwei Mengen P, Q. Die Zugehörigkeit eines Element x des Universums zu einer dieser Mengen drücken wir durch $P(x)$ bzw. $Q(x)$ aus. Formulieren Sie damit in Prädikatenlogik die folgenden Sachverhalte.

(i) P und Q sind nicht disjunkt.

(ii) Es existiert ein Element, das nicht in beiden Mengen enthalten ist.

(iii) Q ist echte Teilmenge von P.

(iv) Für beide Mengen gilt: Wenn a nicht enthalten ist, dann ist auch b nicht enthalten.

Lösung:

(a) Da das Universum U gegeben ist, müssen wir nur noch eine Relation $P \subseteq U \times U$ finden, so dass die Aussagen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wahr werden.

Aus α_3 folgt $(a,b), (b,c), (c,d) \in P$ und $(d,b) \notin P$.

Mit $P = \{(a,b), (b,c), (c,d)\}$ sind α_2 und α_3 erfüllt, aber nicht α_1, denn für $x = d$ existiert kein $y \in U$ mit $(d,y) \in P$. In P fehlt also ein Tupel der Form (d,y).

Welches Tupel kommt hierfür in Frage? $(d,d) \in P$ und $(d,c) \in P$ würden α_2 verletzen, $(d,b) \in P$ würde α_3 verletzen. Bleibt also nur noch $(d,a) \in P$.

Mit $P = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$ werden dann die Aussagen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ erfüllt. Also ist U zusammen mit P ein Modell für $\mathcal{F}$.

(b) (i) $\exists x\, P(x) \wedge Q(x)$

(ii) $\exists x\, \neg(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x) \vee \neg Q(x)$

(iii) $(\forall x\, Q(x) \rightarrow P(x)) \wedge (\exists x\, P(x) \wedge \neg Q(x))$

(iv) $(\neg P(a) \rightarrow \neg P(b)) \wedge (\neg Q(a) \rightarrow \neg Q(b))$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $11 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $2(x+6)+y-1 \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: $\forall x \in M : 11|x$

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} (k+1)2^k = (1+1)2^1 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 1 \cdot 2^{1+1}$$

Also ist die Aussage für $n = 1$ wahr.

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)2^k &= (n+1+1)2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n+2)2^{n+1} + n2^{n+1} \\
&= (n+2+n)2^{n+1} \\
&= (2n+2)2^{n+1} \\
&= 2(n+1)2^{n+1} \\
&= (n+1)2^{n+2}
\end{aligned}$$

(b) Wir nutzen strukturelle Induktion.

Induktionsanfang: $11|11$ ist wahr.

Induktionsschritt: Sei $x, y \in M$. Mit Induktionsvoraussetzung ($11|x$ und $11|y$) folgt:

$$\exists p \in \mathbb{N} : x = 11p \quad \text{und} \quad \exists q \in \mathbb{N} : y = 11q$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
2(x+6)+y-1 &= 2x+12+y-1 \\
&= 2x+y+11 \\
&= 2 \cdot 11p + 11q + 11 \\
&= 11(2p+q+1)
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$11|2(x+6)+y-1$$

Aufgabe 5 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sind die folgenden Relationen R_i auf $\mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation oder eine partielle Ordnung? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$

(b) $R_2 = \{(n,n)|n \in \mathbb{N}\}$

(c) $R_3 = \{(n,m)|n \leq m \leq n+2\}$

(d) $R_4 = \{(n,m)|n \text{ ist Teiler von } m\}$

(e) Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion.
$R_5 = \{(n,m)|f(n) = f(m)\}$

Lösung:

(a) R_1 ist nicht reflexiv, z. B. gilt $(2,2) \notin R_1$. Somit ist R_1 weder eine Äquivalenzrelation noch eine partielle Ordnung.

(b) R_2 besteht genau aus allen reflexiven Elementen von $\mathbb{N}$, ist also reflexiv. Andererseits, da R_2 nur aus diesen reflexiven Elementen besteht, ist R_2 sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch als auch transitiv. R_2 ist somit sowohl eine partielle Ordnung als auch eine Äquivaenzrelation (vgl. Aufgabenblatt 10, Aufgabe 4 (c)).

(c) Es gilt $(1,3),(3,5) \in R_3$, aber $(1,5) \notin R_3$. Also ist R_3 nicht transitiv und somit weder Äquivalenzrelation noch partielle Ordnung.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n|n$, also ist R_4 reflexiv.

Aus $n|m$ und $m|n$ folgt $n = m$. Also ist R_4 antisymmetrisch.

Aus $n|m$ und $m|k$ folgt $n|k$, also ist R_4 transitiv und somit eine partielle Ordnung.

Wegen z. B. $2|4$, aber $4 \nmid 2$ ist R_4 nicht symmetrisch und somit keine Äquivalenzrelation.

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) = f(n)$, also $(n,n) \in R_5$. Damit ist R_5 reflexiv.

Weiterhin gilt:

$$(n,m) \in R_5 \Rightarrow f(n) = f(m) \Rightarrow f(m) = f(n) \Rightarrow (m,n) \in R_5$$

Also ist R_5 symmetrisch.

Wegen

$$(n,m),(m,k) \in R_5 \Rightarrow f(n) = f(m) \wedge f(m) = f(k) \Rightarrow f(n) = f(m) = f(k) \Rightarrow (n,k) \in R_5$$

ist R_5 auch transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

Da für f nichts weiter vorausgesetzt wird, ist f im Allgemeinen nicht injektiv, d. h. es kann $f(n) = f(m)$ für $n \neq m$ gelten. Somit ist R_5 im Allgemeinen nicht antisymmetrisch und damit keine partielle Ordnung.

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A_1, A_2 \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 3x + 1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Bijektivität.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cap A_2) &\Rightarrow \exists x : x \in A_1 \cap A_2 \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x : (x \in A_1 \wedge f(x) = y) \wedge (x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow (\exists x : x \in A_1 \wedge f(x) = y) \wedge (\exists x : x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \\ &\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2) \end{aligned}$$

Bemerkung: siehe Aufgabenblatt 11, Aufgabe 3 (a)

(b) Die Funktion f ist bijektiv genau dann, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Surjektivität: Wir müssen zeigen: $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- $y \geq 1$:
  Wähle $x = 3y - 3 \geq 0$. Damit gilt dann:

$$f(x) = f(3y - 3) = \frac{1}{3}(3y - 3) + 1 = y - 1 + 1 = y$$

- $y < 1$:
  Wähle $x = \frac{y-1}{3} < 0$. Damit gilt dann:

$$f(x) = f\left(\frac{y-1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y-1}{3} + 1 = y - 1 + 1 = y$$

Damit ist f surjektiv.

Injektivität: Wir müssen zeigen: $\forall x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

O.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung:

- $0 \leq x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{3}x_1 + 1 < \frac{1}{3}x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- $x_1 < x_2 < 0$:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- $x_1 < 0 \leq x_2$:
  $x_1 < 0 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 1 \Rightarrow f(x_1) < 1$
  $0 \leq x_2 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{3}x_2 + 1 \Rightarrow 1 \leq f(x_2)$
  Also: $f(x_1) < f(x_2)$.

Damit ist f auch injektiv und insgesamt bijektiv.