Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Lösung zur Klausur Mathematische Grundlagen

Klausur Sommersemester 2017

29. September 2017, 13:00–14:30 Uhr

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.: **Unterschrift:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	12	8	10	60
erreicht							

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkten erhalten Sie eine 1.0.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.
- **Tipp:** Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Bemerkungen:

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Peter Becker) 2. Prüfer (Prof. Dr. Alexander Asteroth)

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ist eine Tautologie.

(b) $\neg r \land p \land \neg(q \to r)$ ist erfüllbar.

(c)

$$\begin{aligned} & (p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \\ \equiv\ & (p_1 \to (q_1 \lor \ldots \lor q_m)) \land (p_2 \to (q_1 \lor \ldots \lor q_m)) \land \ldots \land (p_n \to (q_1 \lor \ldots \lor q_m)) \end{aligned}$$

(d) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta_1 \lor \beta_2$ gilt genau dann, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta_1, \neg\beta_2\}$ unerfüllbar ist.

Lösung:

(a) Wir beweisen dies durch Umformung.

$$\begin{aligned} ((p \to q) \land \neg q) \to \neg p &\equiv ((\neg p \lor q) \land \neg q) \to \neg p \\ &\equiv ((\neg p \land \neg q) \lor (q \land \neg q)) \to \neg p \\ &\equiv ((\neg p \land \neg q) \lor 0) \to \neg p \\ &\equiv (\neg p \land \neg q) \to \neg p \\ &\equiv \neg(\neg p \land \neg q) \lor \neg p \\ &\equiv p \lor q \lor \neg p \\ &\equiv q \lor 1 \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

(b) Wir wählen die Belegung $\mathcal{I}(p) = 1, \mathcal{I}(q) = 1, \mathcal{I}(r) = 0$. Damit gilt $\mathcal{I}^*(q \to r) = 0$ und somit $\mathcal{I}^*(\neg(q \to r)) = 1$. Außerdem: $\mathcal{I}^*(\neg r) = 1$ und $\mathcal{I}^*(p) = 1$ und somit

$$\mathcal{I}^*(\neg r \land p \land \neg(q \to r)) = 1$$

Alternativ hätte man auch eine Wahrheitstabelle aufstellen und darauf verweisen können, dass in der Ergebnisspalte eine 1 steht.

(c) Beweis durch Umformung.

$$\begin{aligned} & (p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \\ \equiv\ & \neg(p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \lor (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \\ \equiv\ & (\neg p_1 \land \neg p_2 \land \ldots \land \neg p_n) \lor (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \\ \equiv\ & (\neg p_1 \lor q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \land (\neg p_2 \lor q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \land \ldots \land (\neg p_n \lor q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m) \\ \equiv\ & (p_1 \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m)) \land (p_2 \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m)) \land \ldots \land (p_n \to (q_1 \lor q_2 \lor \ldots \lor q_m)) \end{aligned}$$

(d) Wir wenden Satz 2.13 an. Nach diesem Satz gilt $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta_1 \lor \beta_2$ genau dann, wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg(\beta_1 \lor \beta_2)\}$ unerfüllbar ist. Jetzt formen wir um:

$$\begin{aligned} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg(\beta_1 \lor \beta_2)\} \text{ ist unerfüllbar} \quad &\text{gdw.} \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta_1 \land \neg\beta_2)\} \text{ ist unerfüllbar} \\ &\text{gdw.} \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta_1, \neg\beta_2)\} \text{ ist unerfüllbar} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Überführen Sie die Formel

$$(p \vee q \vee r) \rightarrow (s \rightarrow t)$$

in konjunktive Normalform und geben Sie die Klauselmenge an.

(b) Gegeben sind die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\neg a, \neg b, c\} \\ K_2 &= \{\neg c, d\} \\ K_3 &= \{a, d\} \\ K_4 &= \{\neg d\} \end{aligned}$$

Zeige Sie mithilfe der Resolution: $\{K_1, \ldots, K_4\} \models a \wedge \neg b$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} (p \vee q \vee r) \rightarrow (s \rightarrow t) &\equiv (p \vee q \vee r) \rightarrow (\neg s \vee t) \\ &\equiv \neg(p \vee q \vee r) \vee \neg s \vee t \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \neg s \vee t \\ &\equiv (\neg p \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee t) \end{aligned}$$

Klauselmenge: $\{\{\neg p, \neg s, t\}, \{\neg q, \neg s, t\}, \{\neg r, \neg s, t\}\}$

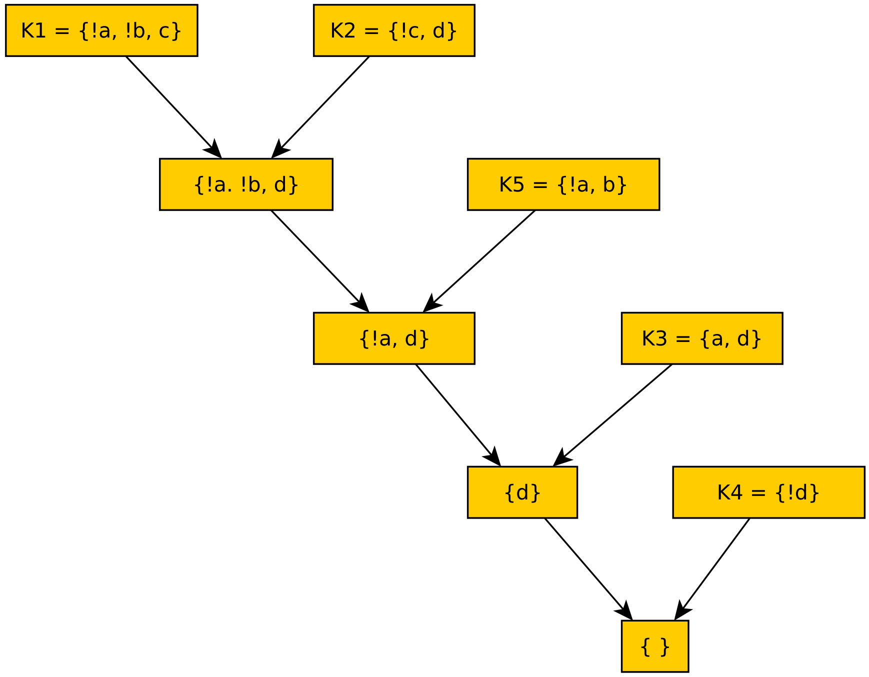
(b) Wir negieren die Hypothese $a \wedge \neg b$:

$$\neg(a \wedge \neg b) \equiv \neg a \vee b$$

Damit entsteht als weitere Klausel: $K_5 := \{\neg a, b\}$.

Mit Resolution ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_6 &:= \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{\neg a, \neg b, d\} \\ K_7 &:= \mathrm{Res}(K_6, K_5) = \{\neg a, d\} \\ K_8 &:= \mathrm{Res}(K_7, K_3) = \{d\} \\ K_9 &:= \mathrm{Res}(K_8, K_4) = \diamond \end{aligned}$$


K1 = {!a, !b, c}
K2 = {!c, d}
{!a. !b, d}
K5 = {!a, b}
{!a, d}
K3 = {a, d}
{d}
K4 = {!d}
{ }

Aufgabe 3 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Gegeben sei die prädikatenlogischen Belegung mit dem Universium

$$U = \{a, b, c\}$$

und

$$\begin{aligned} P &= \{a, b\} \\ Q &= \{b, c\} \end{aligned}$$

für die einstelligen Prädikate P und Q.

Sind die beiden folgenden Formeln wahr oder falsch (mit Begründung):

(a) $(\exists x \, (Q(x) \rightarrow \neg P(x)))$

(b) $(\forall y \, (\neg P(y) \vee \neg Q(y)))$

Formulieren Sie in strenger prädikatenlogischer Syntax die folgenden Sachverhalte:

(c) P und Q haben ein gemeinsames Element.

(d) Wenn P leer ist, dann enthält Q alle Elemente (des Universums).

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(\exists x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))) &= \max\{\mathcal{I}^*(Q(a) \rightarrow \neg P(a)), \mathcal{I}^*(Q(b) \rightarrow \neg P(b)), \mathcal{I}^*(Q(c) \rightarrow \neg P(c))\} \\ &= \max\{\mathcal{I}^*(0 \rightarrow 0), \mathcal{I}^*(1 \rightarrow 0), \mathcal{I}^*(1 \rightarrow 1)\} \\ &= \max\{1, 0, 1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^*(\forall y(\neg P(y) \vee \neg Q(y))) &= \min\{\mathcal{I}^*(\neg P(a) \vee \neg Q(a)), \mathcal{I}^*(\neg P(b) \vee \neg Q(b)), \mathcal{I}^*(\neg P(c) \vee \neg Q(c))\} \\ &= \min\{\mathcal{I}^*(0 \vee 1), \mathcal{I}^*(0 \vee 0), \mathcal{I}^*(1 \vee 0)\} \\ &= \min\{1, 0, 1\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) $(\exists x \, (P(x) \wedge Q(x)))$

(d) $(\forall x \, (\neg P(x))) \rightarrow (\forall x \, Q(x))$

Aufgabe 4 (6+6=12 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 = n(2n-1)$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $3 \in M$ und $5 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $17x + 22y \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: Alle Elemente von M sind ungerade.

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 = \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1 = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = n(2n-1)$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)-1} (-1)^{k-1} k^2 &= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 \\
&= (-1)^{2n-1}(2n)^2 + (-1)^{2n}(2n+1)^2 + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} k^2 \\
&\overset{I.V.}{=} -(2n)^2 + (2n+1)^2 + n(2n-1) \\
&= -4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 + n(2n-1) \\
&= 4n + 1 + 2n^2 - n \\
&= 2n^2 + 3n + 1 \\
&= (n+1)(2n+1) \\
&= (n+1)(2(n+1)-1)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$x \text{ ist ungerade} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k - 1$$

Induktionsanfang: Offensichtlich sind $3 = 2 \cdot 2 - 1 \in M$ und auch $5 = 2 \cdot 3 - 1 \in M$ ungerade Zahlen.

Induktionsschritt: Nach I.V. gilt, dass x und y ungerade Zahlen sind. Also existieren $k, m \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned}
x &= 2k - 1 \\
y &= 2m - 1
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
17x + 22y &= 17(2k-1) + 22(2m-1) \\
&= 34k - 17 + 44m - 22 \\
&= 34k + 44m - 38 - 1 \\
&= 2(17k + 22m - 19) - 1
\end{aligned}$$

Für $l = 17k + 22m - 19 \in \mathbb{N}$ gilt somit:

$$17x + 22y = 2l - 1$$

Also ist $17x + 22y$ ungerade.

Aufgabe 5 (2+2+4=8 Punkte)

Sind die folgenden Relationen $R_i, i = 1, 2, 3$ partielle Ordnungen auf der Grundmenge $\mathbb{N}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \{(n, m) | n - 1 \leq m\}$

(b) $R_2 = \{(n, m) | n + 1 \leq m\}$

(c) $R_3 = \{(n, m) | (n \text{ und } m \text{ sind entweder beide gerade oder beide ungerade) und } n \leq m\}$

Lösung:

(a) R_1 ist keine partielle Ordnung.

Begründung: $1 - 1 = 0 \leq 2$, also $(1, 2) \in R_1$. $2 - 1 = 1 \leq 1$, also $(2, 1) \in R_2$. Damit ist R_1 nicht antisymmetrisch.

(b) R_2 ist keine partielle Ordnung.

Begründung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 \not\leq n$ und somit $(n, n) \notin R_2$. Also ist R_2 nicht reflexiv.

(c) R_3 ist eine partielle Ordnung.

Reflexivität: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \leq n$. Für ein Paar (n, n) sind außerdem stets beide Komponenten entweder gerade oder ungerade, da sie ja gleich sind. Damit folgt: $(n, n) \in R_3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist R_3 reflexiv.

Antisymmetrie: Sei $(n, m) \in R_3$ und $(m, n) \in R_3$. Daraus folgt: $n \leq m$ und $m \leq n$ und damit $n = m$. Also ist R_3 antisymmetrisch.

Transitivität: Es gelte $(k, m) \in R_3$ und $(m, n) \in R_3$. Daraus folgt: $k \leq m$ und $m \leq n$ und somit $k \leq n$.

Wegen $(k, m) \in R_3$ gilt: Entweder sind k und m beide gerade oder beide ungerade. Wenn beide gerade sind, muss wegen $(m, n) \in R_3$ auch n gerade sein. Damit folgt dann insgesamt $(k, n) \in R_3$. Analog folgt, dass n ungerade ist, wenn k ungerade ist. Somit gilt für diesen Fall dann auch $(k, n) \in R_3$. Also ist R_3 transitiv.

Aufgabe 6 (4+6=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{falls } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cap A_2) &\Rightarrow \exists x : x \in A_1 \cap A_2 \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x : (x \in A_1 \wedge f(x) = y) \wedge (x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow (\exists x : x \in A_1 \wedge f(x) = y) \wedge (\exists x : x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \\ &\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2) \end{aligned}$$

(b) Die Funktion f ist bijektiv genau dann, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Surjektivität: Wir müssen zeigen: $\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- $y \geq 5$:
  Wähle $x = \frac{y+1}{3} \geq 2$. Damit gilt dann:

$$f(x) = f\left(\frac{y+1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y+1}{3} - 1 = y + 1 - 1 = y$$

- $y < 5$:
  Wähle $x = \frac{y-1}{2} < 2$. Damit gilt dann:

$$f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y - 1 + 1 = y$$

Damit ist f surjektiv.

Injektivität: Wir müssen zeigen: $\forall x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

O.B.d.A. sei $x_1 < x_2$. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung:

- $x_1 < x_2 < 2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- $2 \le x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- $x_1 < 2 \le x_2$:
  $x_1 < 2 \Rightarrow 2x_1 < 4 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 5 \Rightarrow f(x_1) < 5$
  $2 \le x_2 \Rightarrow 6 \le 3x_2 \Rightarrow 5 \le 3x_2 - 1 \Rightarrow 5 \le f(x_2)$
  Also: $f(x_1) < f(x_2)$ und somit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Damit ist f auch injektiv und insgesamt bijektiv.