Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen

Klausur Sommersemester 2016

16. September 2016, 13:00–14:30 Uhr

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.: **Unterschrift:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkten erhalten Sie eine 1.0.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.
- **Tipp:** Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Bemerkungen:

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Peter Becker)

2. Prüfer (Prof. Dr. Alexander Asteroth)

Aufgabe 1 (3+2+2+3=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $((p \wedge q) \leftrightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$ ist eine Tautologie.

(b) Gilt $\{\alpha\} \models \beta$, dann ist $\alpha \wedge \neg\beta$ unerfüllbar.

(c) $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \rightarrow q \equiv (\neg p_1 \vee q) \wedge (\neg p_2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n \vee q)$

(d) Wenn α unerfüllbar ist und wenn β unerfüllbar ist, dann ist $\alpha \rightarrow \beta$ eine Tautologie.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr. Beweis mit Wahrheitstafel:

p	q	$\alpha = (p \wedge q) \leftrightarrow \neg q$	$\beta = \neg(p \wedge q)$	$\alpha \rightarrow \beta$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

In der Ergebnisspalte rechts steht ausschließlich 1, also ist die Formel eine Tautologie.

(b) Diese Aussage ist wahr. Dies folgt aus der Vorlesung mit Satz 2.13. Danach gilt:

$\{\alpha\} \models \beta$ gilt genau dann, wenn $\{\alpha, \neg\beta\}$ unerfüllbar ist.

Die unerfüllbare Aussagenmenge $\{\alpha, \neg\beta\}$ entspricht wiederum der Aussage $\alpha \wedge \neg\beta$.

(c) Die Aussage ist wahr. Wir führen den Nachweis durch logisch äquivalente Umformungen:

$$\begin{aligned} p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \rightarrow q &\equiv \neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \vee q \\ &\equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n \vee q \\ &\equiv (\neg p_1 \vee q) \wedge (\neg p_2 \vee q) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n \vee q) \end{aligned}$$

(d) Auch diese Aussage ist wahr. Wenn α und β unerfüllbar sind, dann gilt $\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta) = 0$ für alle möglichen Belegungen $\in \mathcal{I}_\alpha$ bzw. $\in \mathcal{I}_\beta$. Da $\mathcal{I}^*(0 \rightarrow 0) = 1$ folgt somit $\mathcal{I}^*(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ für alle Belegungen $\in \mathcal{I}_{\alpha\rightarrow\beta}$. Also ist $\alpha \rightarrow \beta$ eine Tautologie.

Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Überführen Sie die Formel

$$((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (s \vee \neg t)$$

in konjunktive Normalform und geben Sie die Klauselmenge an.

(b) Gegeben sind die folgenden Klauseln:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{p, \neg q, t\} \\ K_2 &= \{\neg q, r, \neg t\} \\ K_3 &= \{\neg p, r\} \\ K_4 &= \{q, s\} \\ K_5 &= \{q, \neg s\} \end{aligned}$$

Zeige Sie mithilfe der Resolution: $\{K_1, \ldots, K_5\} \models r$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} ((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (s \vee \neg t) &\equiv \neg((p \wedge q) \vee r) \vee (s \vee \neg t) \\ &\equiv (\neg(p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (s \vee \neg t) \\ &\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee (s \vee \neg t) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee s \vee \neg t) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Klauselmenge $M = \{\{\neg p, \neg q, s, \neg t\}, \{\neg r, s, \neg t\}\}$.

(b) Sei $K_6 = \{\neg r\}$. Wir zeigen, dass $\{K_1, \ldots, K_6\}$ unerfüllbar ist.

$$\begin{aligned} K_7 &= \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{p, \neg q, r\} \\ K_8 &= \mathrm{Res}(K_7, K_3) = \{\neg q, r\} \\ K_9 &= \mathrm{Res}(K_4, K_5) = \{q\} \\ K_{10} &= \mathrm{Res}(K_8, K_9) = \{r\} \\ K_{11} &= \mathrm{Res}(K_{10}, K_6) = \diamond \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Gegeben sei eine quadratische Matrix $M \subseteq \{0,1\}^{n\times n}$. M hat als Komponenten also nur 0 oder 1. Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Prädikat $N(i,j)$ sei genau dann wahr, wenn in Zeile i und Spalte j von M eine 0 steht, das Prädikat $E(i,j)$ sei genau dann wahr, wenn in Zeile i und Spalte j eine 1 steht. Für das Universum U gilt also $U = \{1,\ldots,n\}$.

Formulieren Sie nun in Prädikatenlogik die folgenden Sachverhalte.

(a) M hat eine 1.

(b) Jede Zeile von M enthält mindestens eine 0.

(c) Es gibt eine Spalte, die nur aus 0'en besteht.

(d) Die beiden ersten Zeilen sind gleich.

(e) M ist symmetrisch.

Lösung:

(a) $\exists i\, \exists j\, E(i,j)$

(b) $\forall i\, \exists j\, N(i,j)$

(c) $\exists j\, \forall i\, N(i,j)$

(d) $\forall j\, ((E(1,j) \leftrightarrow E(2,j)) \land (N(1,j) \leftrightarrow N(2,j)))$

(e) $\forall i\, \forall j\, ((E(i,j) \leftrightarrow E(j,i)) \land (N(i,j) \leftrightarrow N(j,i)))$

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (k+2)(k-1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+4)$$

(b) Die formale Sprache $\mathcal{S}$ sei über dem Alphabet $\{\bigcirc, \Box\}$ wie folgt definiert:

(i) $\bigcirc \in \mathcal{S}$ und $\bigcirc\Box\bigcirc \in \mathcal{S}$

(ii) Gilt $r, s \in \mathcal{S}$, dann gilt auch $r\Box \bigcirc \Box s \in \mathcal{S}$.

(iii) $\mathcal{S}$ enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: Jedes $s \in \mathcal{S}$ enthält mehr $\bigcirc$ als $\Box$.

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} (k+2)(k-1) = (1+2)(1-1) = 3 \cdot 0 = 0 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1-1) \cdot (1+4)$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (k+2)(k-1) &= (n+1+2)(n+1-1) + \sum_{k=1}^{n} (k+2)(k-1) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} n(n+3) + \frac{1}{3}n(n-1)(n+4) \\
&= \frac{1}{3}n(3(n+3) + (n-1)(n+4)) \\
&= \frac{1}{3}n(3n+9+n^2+3n-4) \\
&= \frac{1}{3}n(n^2+6n+5) \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+5) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)n(n+5)
\end{aligned}$$

(b) Für ein $c \in \{\bigcirc, \Box\}$ und $s \in \mathcal{S}$ bezeichne $|s|_c$ die Anzahl der Zeichen c in s. Mit dieser Notation ist dann zu zeigen:

$$\forall s \in \mathcal{S} : |s|_{\bigcirc} > |s|_{\Box}$$

Induktionsanfang: Es gilt:

$$|\bigcirc|_{\bigcirc} = 1 > 0 = |\bigcirc|_{\Box} \text{ und } |\bigcirc\Box\bigcirc|_{\bigcirc} = 2 > 1 = |\bigcirc\Box\bigcirc|_{\Box}.$$

Induktionsschritt: Seien $r, s \in \mathcal{S}$. Nach I.V. gilt

$$|r|_{\bigcirc} > |r|_{\Box} \text{ und } |s|_{\bigcirc} > |s|_{\Box}$$

und somit

$$|r|_{\bigcirc} \geq |r|_{\Box} + 1 \text{ und } |s|_{\bigcirc} \geq |s|_{\Box} + 1$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
|r\Box \bigcirc \Box s|_{\bigcirc} &= |r|_{\bigcirc} + |s|_{\bigcirc} + 1 \\
&\geq (|r|_{\Box} + 1) + (|s|_{\Box} + 1) + 1 \\
&= |r|_{\Box} + |s|_{\Box} + 3 \\
&> |r|_{\Box} + |s|_{\Box} + 2 \\
&= |r\Box \bigcirc \Box s|_{\Box}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4+6=10 Punkte)

(a) Es sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$. Geben Sie die folgenden Relationen explizit an:

(i) $(A \cup B) \times (A \cap B)$

(ii) $(A \setminus A) \times A$

(iii) $\mathcal{P}(A) \times (B \setminus A)$

(b) Zeigen Sie: Die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$R = \{(x, y) | \exists k \in \mathbb{N}_0 : y = 2^k x\}$$

ist eine partielle Ordnung.

Lösung:

(a) (i) $(A \cup B) \times (A \cap B) = \{1, 2, 3\} \times \{2\} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

(ii) $(A \setminus A) \times A = \emptyset \times A = \emptyset$

(iii) $\mathcal{P}(A) \times (B \setminus A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \times \{3\} = \{(\emptyset, 3), (\{1\}, 3), (\{2\}, 3), (\{1, 2\}, 3)\}$

(b) R ist genau dann eine partielle Ordnung, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

reflexiv: $x = 1 \cdot x = 2^0 \cdot x$. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ (nämlich $k = 0$) mit $x = 2^k x$. Demnach gilt $(x, x) \in R$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

antisymmetrisch: Sei $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$. Daraus folgt

$$y = 2^k x \text{ und } x = 2^{k'} y$$

Setzen wir die rechte Gleichung in die linke ein, erhalten wir

$$y = 2^k 2^{k'} y$$

Daraus folgt $2^k 2^{k'} = 1$ und somit $k+k' = 0$. Für diese Gleichung gibt es aber nur $k = k' = 0$ als Lösung in $\mathbb{N}_0$. Somit folgt $2^k = 1$ und damit $x = y$.

transitiv: Sei $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Damit folgt

$$y = 2^{k'} x \text{ und } z = 2^{k''} y$$

Wir setzen die linke Gleichung in die rechte ein und erhalten:

$$z = 2^{k''} 2^{k'} x = 2^{k''+k'} x$$

Also existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ (nämlich $k = k' + k''$) mit $z = 2^k x$. Damit folgt $(x, z) \in R$.

Aufgabe 6 (4+2+4=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A, B \subseteq N$. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

(b) Gilt in (a) auch

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)?$$

(c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - 1 & \text{falls } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Rightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

(b) Ja, denn im Beweis von (a) gilt auch stets die Rückrichtung.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) &\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ &\Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ &\Rightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \end{aligned}$$

(c) Surjektivität: Sei $y > 0$. Wähle $x = 4y + 4 > 0$. Dann gilt:

$$f(x) = f(4y + 4) = \frac{1}{4}(4y + 4) - 1 = y$$

Sei $y \leq 0$. Wähle $x = \frac{y-1}{2} \leq 0$. Dann gilt:

$$f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\frac{y-1}{2} + 1 = y$$

Also: Für alle $y \in \mathbb{R}$ existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$.

Injektivität:

$$f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 = \frac{1}{4} \cdot 4 - 1 = f(4)$$

Also ist f nicht injektiv.

Bijektivität: Weil die Funktion f nicht injektiv ist, ist sie auch nicht bijektiv.