Lösungen zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (Allgemeine Beweismethoden)

Zeigen Sie mit einem direkten Beweis:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \Rightarrow 8x + 4 \geq 4x + 8$

(b) $\forall p \in \mathbb{N}\, \forall q \in \mathbb{N} : 2|p \wedge 3|q \Rightarrow 6|(3p^2 + 2q^2)$

Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis:

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : 2|n^3 \Rightarrow 2|n$

Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis:

(d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$ (je 3 Punkte)

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\overset{\cdot 4}{\Rightarrow} 4x \geq 4 \\ &\overset{+4}{\Rightarrow} 4x + 4 \geq 8 \\ &\overset{+4x}{\Rightarrow} 8x + 4 \geq 4x + 8 \end{aligned}$$

(b) $2|p \Rightarrow \exists a \in \mathbb{N} : 2a = p$

$3|q \Rightarrow \exists b \in \mathbb{N} : 3b = q$

Damit folgt:

$$3p^2 + 2q^2 = 3(2a)^2 + 2(3b)^2 = 12a^2 + 18b^2 = 6(2a^2 + 3b^2)$$

Also: $\exists c \in \mathbb{N} : 6c = 3p^2 + 2q^2$, nämlich $c = 2a^2 + 3b^2$.

Damit folgt: $6|(3p^2 + 2q^2)$.

(c) Da es sich um einen indirekten Beweis handeln soll, zeigen wir:

$$2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^3$$

Es gilt: $2 \nmid n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k+1$.

$$\begin{aligned} 2 \nmid n \quad &\Rightarrow \quad n = 2k+1 \\ &\Rightarrow \quad n^3 = (2k+1)^3 \\ &\Rightarrow \quad n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &\Rightarrow \quad n^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 \end{aligned}$$

Also: $\exists k' \in \mathbb{N}_0 : n^3 = 2k' + 1$, nämlich $k' = 4k^3 + 6k^2 + 3k$.

Damit folgt: $2 \nmid n^3$.

(d) Wir nehmen an: $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$.
Dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ und p und q sind teilerfremd.

$$\begin{aligned} & \sqrt{7} = \frac{p}{q} \\ \Rightarrow \quad & 7 = \frac{p^2}{q^2} \\ \Rightarrow \quad & 7q^2 = p^2 \quad (*) \\ \Rightarrow \quad & 7 | p^2 \end{aligned}$$

Da 7 eine Primzahl ist, hat somit p^2 die 7 als Primfaktor. Da p^2 die gleichen Primfaktoren wie p hat (nur in doppelter Anzahl), ist 7 somit auch ein Primfaktor von p und somit

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & 7 | p \\ \Rightarrow \quad & \exists a \in \mathbb{N} : 7a = p \end{aligned}$$

Wir setzen $7a = p$ in $(*)$ ein:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & 7q^2 = (7a)^2 \\ \Rightarrow \quad & 7q^2 = 49a^2 \\ \Rightarrow \quad & q^2 = 7a^2 \\ \Rightarrow \quad & 7 | q^2 \\ \Rightarrow \quad & 7 | q \end{aligned}$$

Also gilt: $7|p$ und $7|q$. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Aussage, dass p und q teilerfremd sind.

Aufgabe 2 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 24|(9^n + 15)$ (je 3 Punkte)

Lösung:

(a) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{n}{n+1}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1 + n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

(b) $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{1} (2k-1)^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= (2(n+1)-1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} (2n+1)^2 + \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6} \\ &= \frac{6(2n+1)^2 + (2n-1)2n(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(6(2n+1) + (2n-1)2n)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(4n^2 + 10n + 6)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(2(n+1)-1)2(n+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

(c) $n=1$: $9^n+15=9^1+15=9+15=24$ und $24|24$ ist wahr.

$n \to n+1$: Induktionsvoraussetzung ist $24|(9^n+15)$, d. h. $\exists k \in \mathbb{N} : 24k = 9^n + 15$

$$\begin{aligned}
9^{n+1}+15 &= 9\cdot 9^n + 15 \\
&= 9\cdot 9^n + 9\cdot 15 - 8\cdot 15 \\
&= 9(9^n+15) - 120 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} 9\cdot 24k - 5\cdot 24 \\
&= 24(9k-5)
\end{aligned}$$

Also: $\exists k' \in \mathbb{N} : 24k' = 9^{n+1} + 15$, nämlich $k' = 9k-5$, und somit gilt $24|(9^{n+1}+15)$.