Lösungen zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (Resolution)

Sei $\alpha = (p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge \neg r$.

(a) Geben Sie M_α an! (1 Punkt)

(b) Berechnen Sie $\text{Res}^*(M_\alpha)$! (3 Punkte)

Hinweis: Nehmen Sie keine trivialen Klauseln in $\text{Res}^j(M_\alpha)$ für $j \geq 1$ auf. Zur Erinnerung: Eine *triviale Klausel* ist eine Klausel, die eine Variable und deren Negation enthält (siehe Defintion 2.38). Beispiel: $\{p, \neg q, q\}$. Gemäß Satz 2.40 (iii) können wir auf triviale Klauseln verzichten.

(c) Ist α erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

(d) Falls α unerfüllbar ist, dann geben Sie eine Deduktion für die leere Klausel an und zeichnen Sie einen entsprechenden Resolutionsgraphen! (2 Punkte)

Lösung:

(a)

$$M_\alpha = \{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg r\}\}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl}
\text{Res}^0(M_\alpha) & = & M_\alpha \\
\text{Res}^1(M_\alpha) & = & \{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg r\}, \\
& & \{p, r\}, \{\neg q, r\}, \{p, \neg q\}, \{q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p\}\} \\
\text{Res}^2(M_\alpha) & = & \{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg r\}, \\
& & \{p, r\}, \{\neg q, r\}, \{p, \neg q\}, \{q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p\}, \\
& & \{r\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{p\}, \{\neg q\}\} \\
\text{Res}^3(M_\alpha) & = & \{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg r\}, \\
& & \{p, r\}, \{\neg q, r\}, \{p, \neg q\}, \{q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p\}, \\
& & \{r\}, \{p, q\}, \{p, \neg r\}, \{p\}, \{\neg q\}, \\
& & \diamond\} \\
\text{Res}^4(M_\alpha) & = & \text{Res}^3(M_\alpha)
\end{array}$$

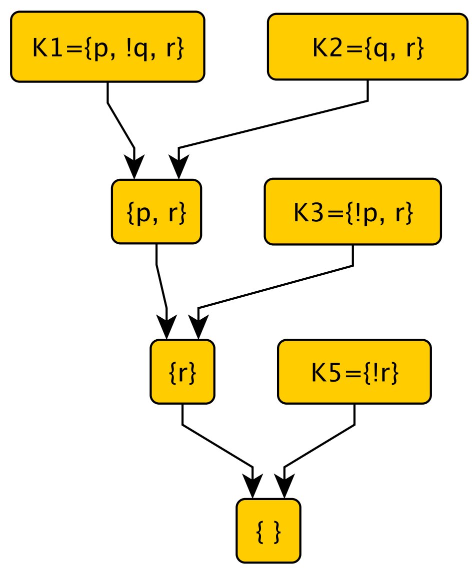
Also gilt $\text{Res}^*(M_\alpha) = \text{Res}^3(M_\alpha)$.

(c) Nach Folgerung 2.51 gilt, dass M_α (und damit α) genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathrm{Res}^*(M_\alpha)$ erfüllbar ist. Hier enthält $\mathrm{Res}^*(M_\alpha)$ aber die leere Klausel, ist also unerfüllbar. Somit ist auch α nicht erfüllbar.

(d) Es gilt $M_\alpha = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$ mit $K_1 = \{p, \neg q, r\}$, $K_2 = \{q, r\}$, $K_3 = \{\neg p, r\}$, $K_4 = \{q, \neg r\}$ und $K_5 = \{\neg r\}$. Deduktion der leeren Klausel:

$$\begin{aligned} K_6 &= \mathrm{Res}(K_1, K_2) = \{p, r\} \\ K_7 &= \mathrm{Res}(K_6, K_3) = \{r\} \\ K_8 &= \mathrm{Res}(K_7, K_5) = \diamond \end{aligned}$$

Resolutionsgraph:



Aufgabe 2 (Anwendung der Resolution)

Nachdem König Artus zusammen mit seinen Rittern der Tafelrunde eine ganze Weile lang nichts anderes getan hatte, als täglich zu feiern und zu trinken, fasste er eines Morgens den Entschluss: „Ich muss endlich losziehen und den heiligen Gral suchen.“ Die Ritter der Tafelrunde beschließen, dass mindestens einer von ihnen König Artus bei der Suche nach dem heiligen Gral begleiten muss. Mögliche Begleiter sind die Ritter Lancelot, Parceval, Tristan und Galahad. Nun sind Ritter aber ziemlich eigensinnige Zeitgenossen und so diskutieren sie, wer König Artus bei der Suche begleiten soll.

Lancelot: „Wenn Parceval nicht geht und Tristan nicht geht, dann geh’ ich auch nicht.“

Parceval: „Ich gehe nur, wenn Tristan oder Galahad mitgehen.“

Tristan: „Wenn Parceval nicht geht, dann gehe ich auch nicht.“

Galahad: „Ich gehe nur, wenn Parceval nicht mitkommt. Wenn Tristan geht, dann will ich auch mit.“

(a) Modellieren Sie die Aussagen der Ritter als aussagenlogische Formeln und geben Sie für jede Formel die zugehörige(n) Klausel(n) an. (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die vier Ritter nur zufrieden sind, wenn Galahad als einziger König Artus bei der Suche nach dem heiligen Gral begleitet. Zeichnen Sie einen Resolutionsgraphen, um die Ableitung zu verdeutlichen.

Hinweise:

- Die Ableitung wird Ihnen nur dann gelingen, wenn Sie neben den Aussagen der Ritter noch eine weitere Aussage verwenden, die im Text versteckt ist.
- Am einfachsten ist es, wenn Sie Satz 2.13 nutzen. Hierzu müssen Sie die Hypothese „Galahad begleitet als einziger König Artus“ negieren und die entsprechende Klausel der Klauselmenge hinzufügen. Aus dieser erweiterten Klauselmenge leiten Sie dann die leere Klausel ab. (6 Punkte)

Lösung:

(a) Wir verwenden die Aussagenvariablen x_L, x_P, x_T, x_G für die Aussage, dass L(ancelot), P(arceval), T(ristan) bzw. G(alahad) König Artus begleiten.

Formal lauten die Aussagen dann:

Lancelot: $(\neg x_P \wedge \neg x_T) \rightarrow \neg x_L \equiv \neg(\neg x_P \wedge \neg x_T) \vee \neg x_L \equiv x_P \vee x_T \vee \neg x_L$
Klausel: $K_1 = \{\neg x_L, x_P, x_T\}$

Parceval: $x_P \rightarrow (x_T \vee x_G) \equiv \neg x_P \vee x_T \vee x_G$
Klausel: $K_2 = \{\neg x_P, x_T, x_G\}$

Tristan: $\neg x_P \rightarrow \neg x_T \equiv x_P \vee \neg x_T$
Klausel: $K_3 = \{x_P, \neg x_T\}$

Galahad: $(x_G \rightarrow \neg x_P) \wedge (x_T \rightarrow x_G) \equiv (\neg x_G \vee \neg x_P) \wedge (\neg x_T \vee x_G)$
Klauseln: $K_4 = \{\neg x_P, \neg x_G\}$ und $K_5 = \{\neg x_T, x_G\}$

(b) Im Text steht, dass mindestens einer der Ritter König Artus begleiten soll, also

$$x_L \vee x_P \vee x_T \vee x_G$$

Daraus entsteht die Klausel $K_6 = \{x_L, x_P, x_T, x_G\}$.

Die Hypothese lautet, dass nur Galahad König Artus begleitet, also

$$\neg x_L \wedge \neg x_P \wedge \neg x_T \wedge x_G$$

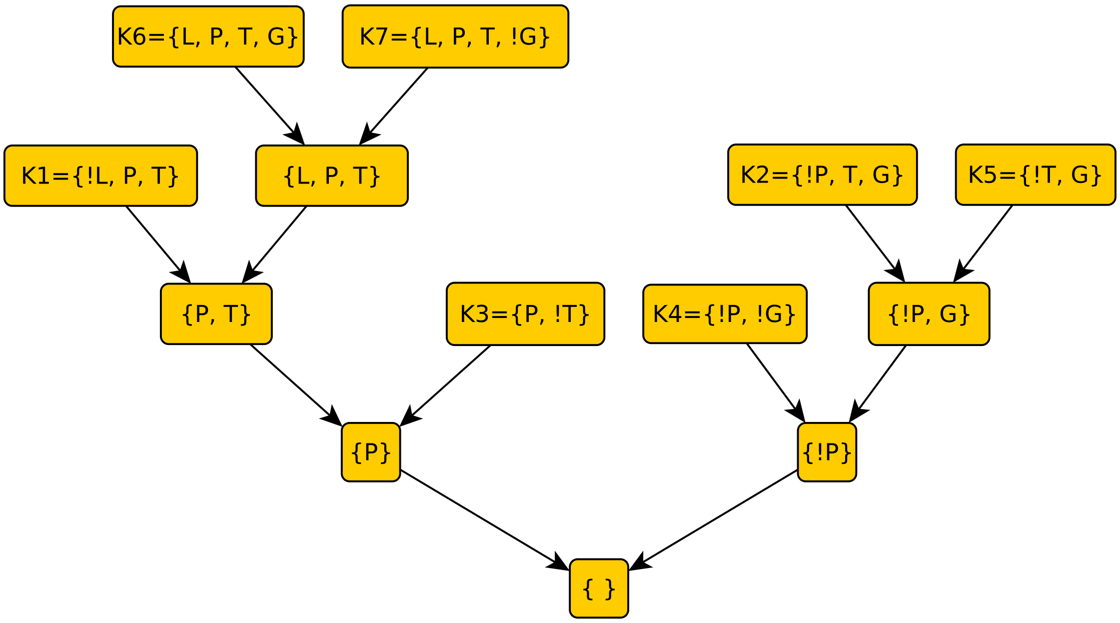
Wir negieren die Hypothese:

$$\neg(\neg x_L \wedge \neg x_P \wedge \neg x_T \wedge x_G) \equiv x_L \vee x_P \vee x_T \vee \neg x_G$$

Damit haben wir als weitere Klausel $K_7 = \{x_L, x_P, x_T, \neg x_G\}$.

Eine Deduktion der leeren Klausuel ist:

$$\begin{aligned}
K_8 &= \text{Res}(K_6, K_7) = \{x_L, x_P, x_T\} \\
K_9 &= \text{Res}(K_1, K_8) = \{x_P, x_T\} \\
K_{10} &= \text{Res}(K_2, K_5) = \{\neg x_P, x_G\} \\
K_{11} &= \text{Res}(K_9, K_3) = \{x_P\} \\
K_{12} &= \text{Res}(K_4, K_{10}) = \{\neg x_P\} \\
K_{13} &= \text{Res}(K_{11}, K_{12}) = \diamond
\end{aligned}$$


K6={L, P, T, G}
K7={L, P, T, !G}
K1={!L, P, T}
{L, P, T}
K2={!P, T, G}
K5={!T, G}
{P, T}
K3={P, !T}
K4={!P, !G}
{!P, G}
{P}
{!P}
{ }