Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Wintersemester 2016/17
28. Oktober 2016

# Lösungen zu Aufgabenblatt 5

## Aufgabe 1 (Logisch äquivalente Umformungen)

Beweisen Sie alleine unter Anwendung bekannter logischer Äquivalenzen,

(a) dass die Formel

$$\neg(p \to q) \land \neg(q \to r)$$

unerfüllbar ist (verwenden Sie also keine Wahrheitstafel). Geben Sie dabei für jede logisch äquivalente Umformung an, welche Regel Sie nutzen. (3 Punkte)

(b) dass

$$(\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \equiv \neg p$$

gilt. (2 Punkte)

**Lösung:**

(a)

$$\begin{array}{rcl}
 & & \neg(p \to q) \land \neg(q \to r) \\
/* \alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta */ & \equiv & \neg(\neg p \lor q) \land \neg(q \to r) \\
/* \alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta */ & \equiv & \neg(\neg p \lor q) \land \neg(\neg q \lor r) \\
/* \neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta */ & \equiv & \neg\neg p \land \neg q \land \neg(\neg q \lor r) \\
/* \neg\neg\alpha \equiv \alpha */ & \equiv & p \land \neg q \land \neg(\neg q \lor r) \\
/* \neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta */ & \equiv & p \land \neg q \land \neg\neg q \land \neg r \\
/* \neg\neg\alpha \equiv \alpha */ & \equiv & p \land \neg q \land q \land \neg r \\
/* \neg\alpha \land \alpha \equiv 0 */ & \equiv & p \land 0 \land \neg r \\
/* \alpha \land 0 \equiv 0 */ & \equiv & 0 \land \neg r \\
/* 0 \land \alpha \equiv 0 */ & \equiv & 0
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rl}
 & (\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \\
\equiv & (((\neg p \lor q) \lor r) \land ((\neg p \lor q) \lor \neg r)) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \\
\equiv & ((\neg p \lor q) \lor (r \land \neg r)) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \\
\equiv & ((\neg p \lor q) \lor 0) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \\
\equiv & (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \\
\equiv & (\neg p \lor q) \land (((\neg p \lor \neg q) \lor r) \land ((\neg p \lor \neg q) \lor \neg r))
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee (r \wedge \neg r)) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee 0) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
&\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg q) \\
&\equiv \neg p \vee 0 \\
&\equiv \neg p
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 2 (Logische Basis)

Wir definieren die beiden zweistelligen aussagenlogischen Verknüpfungen $\spadesuit$ und $\clubsuit$ durch

$$\alpha \clubsuit \beta \equiv \alpha \vee \neg \beta \quad \text{und} \quad \alpha \spadesuit \beta \equiv \alpha \wedge \neg \beta.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{\spadesuit, \clubsuit\}$ eine aussagenlogische Basis bildet. Stellen Sie hierzu die Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ der boolschen Basis ausschließlich durch die beiden Verknüpfungen $\spadesuit$ und $\clubsuit$ dar, und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Darstelliung durch äquivalente Umformungen.
(6 Punkte)

**Lösung:** Wir stellen die drei aussagenlogischen Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ mithilfe der Verknüpfungen $\spadesuit$ und $\clubsuit$ dar. Da $\{\neg, \wedge, \vee\}$ eine aussagenlogische Basis bildet, ist dann auch $\{\spadesuit, \clubsuit\}$ eine aussagenlogische Basis.

Nach Definition der Operatoren $\spadesuit$ und $\clubsuit$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\alpha \spadesuit \alpha &\equiv \alpha \wedge \neg \alpha \equiv 0 \\
\alpha \clubsuit \alpha &\equiv \alpha \vee \neg \alpha \equiv 1
\end{aligned}
$$

- Es gilt $\neg \alpha \equiv (\alpha \spadesuit \alpha) \clubsuit \alpha$.

  Beweis durch Umformung:

  $$\neg \alpha \equiv 0 \vee \neg \alpha \equiv 0 \clubsuit \alpha \equiv (\alpha \spadesuit \alpha) \clubsuit \alpha$$

- Es gilt $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \spadesuit ((\beta \spadesuit \beta) \clubsuit \beta)$.

  Beweis durch Umformung:

  $$
  \begin{aligned}
  \alpha \wedge \beta &\equiv \alpha \wedge \neg(\neg \beta) \\
  &\equiv \alpha \spadesuit (\neg \beta) \\
  &\equiv \alpha \spadesuit ((\beta \spadesuit \beta) \clubsuit \beta)
  \end{aligned}
  $$

- Es gilt: $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \clubsuit ((\beta \spadesuit \beta) \clubsuit \beta)$.

  Beweis durch Umformung:

  $$
  \begin{aligned}
  \alpha \vee \beta &\equiv \alpha \vee \neg(\neg \beta) \\
  &\equiv \alpha \clubsuit (\neg \beta) \\
  &\equiv \alpha \clubsuit ((\beta \spadesuit \beta) \clubsuit \beta)
  \end{aligned}
  $$

## Aufgabe 3 (Konjunktive Normalform)

Transformieren Sie mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren (Beweisskizze zu Satz 2.36) die folgenden Formeln in KNF!

(a) $(q \rightarrow r) \vee (s \wedge \neg p)$

(b) $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (s \vee \neg t)$ (4 Punkte)

**Lösung:**

(a)

$$\begin{aligned} (q \rightarrow r) \vee (s \wedge \neg p) &\equiv (\neg q \vee r) \vee (s \wedge \neg p) \\ &\equiv ((\neg q \vee r) \vee s) \wedge ((\neg q \vee r) \vee \neg p) \\ &\equiv (\neg q \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg p) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} ((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (s \vee \neg t) &\equiv \neg((p \wedge q) \vee r) \vee (s \vee \neg t) \\ &\equiv (\neg(p \wedge q) \wedge \neg r) \vee (s \vee \neg t) \\ &\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee (s \vee \neg t) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee s \vee \neg t) \end{aligned}$$