Lösungen zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (Tautologie, Erfüllbarkeit und Modell)

(a) Welche der folgenden Formeln sind Tautologien? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(i) $((x \to y) \land (\neg y \to \neg x)) \leftrightarrow (x \leftrightarrow y)$

(ii) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow ((\neg x \to \neg y) \land (y \lor \neg x))$ (2 Punkte)

(b) Welche der folgenden Formelmengen sind erfüllbar? Geben Sie im Falle der Erfüllbarkeit mindestens ein Modell an.

(i) $\mathcal{F}_1 = \{p \lor q \lor r, r \to (p \lor q), p \leftrightarrow \neg q\}$

(ii) $\mathcal{F}_2 = \{p \lor r, \neg p \lor s, \neg r \land \neg s\}$

(iii) $\mathcal{F}_3 = \{q \to p, r \to q, p \to r, p \land \neg q\}$

(iv) $\mathcal{F}_4 = \{r \to p, p \to q, q \to r, \neg p\}$ (4 Punkte)

Lösungen:

(a) (i) Die Formel ist keine Tautologie. Beweis:

x	y	$x \to y$	$\neg y \to \neg x$	$(x \to y) \land (\neg y \to \neg x)$	$x \leftrightarrow y$	$((x \to y) \land (\neg y \to \neg x)) \leftrightarrow (x \leftrightarrow y)$
0	1	1	1	1	0	0

Es gibt also eine Interpretation, nämlich $\mathcal{I}(x) = 0, \mathcal{I}(y) = 1$, für die die Formel nicht wahr ist. Demnach ist die Formel keine Tautologie.

(i) Die Formel ist eine Tautologie. Beweis:

x	y	$x \leftrightarrow y$	$\neg x \to \neg y$	$y \lor \neg x$	$(\neg x \to \neg y) \land (y \lor \neg x)$	$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow ((\neg x \to \neg y) \land (y \lor \neg x))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

(b) (i) Die Formelmenge ist erfüllbar. Ein Modell ist:

p	q	r	$p \lor q \lor r$	$r \to (p \lor q)$	$p \leftrightarrow \neg q$
1	0	0	1	1	1

(ii) Die Formelmenge ist nicht erfüllbar.

p	r	s	$p \vee r$	$\neg p \vee s$	$\neg r \wedge \neg s$
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0			0
0	1	1			0
1	0	0		0	
1	0	1			0
1	1	0		0	
1	1	1			0

(iii) Die Formelmenge ist nicht erfüllbar.

p	q	r	$q \to p$	$r \to q$	$p \to r$	$p \wedge \neg q$
0	0	0				0
0	0	1		0		
0	1	0	0			
0	1	1	0			
1	0	0			0	
1	0	1		0		
1	1	0			0	
1	1	1				0

(iv) Die Formelmenge ist erfüllbar. Ein Modell ist:

p	q	r	$r \to p$	$p \to q$	$q \to r$	$\neg p$
0	0	0	1	1	1	1

Aufgabe 2 (Logische Folgerung)

Zeigen Sie, dass für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ gilt:

(a) $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta$ (Modus Ponens)

(b) $\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$ (Modus Tollens)

(c) $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \models \alpha \to \gamma$ (Kettenschluss)

(d) $\{\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \gamma\} \models \beta \vee \gamma$ (Resolutionsregel)

(e) $\{\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma\} \not\models \gamma$ (8 Punkte)

Lösung:

(a)

α	β	$\alpha \to \beta$	Modell?
0	0	1	$-$
0	1	1	$-$
1	0	0	$-$
1	1	1	$+$

In jedem Modell für $\{\alpha, \alpha \to \beta\}$ ist auch β wahr. Also gilt

$$\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta$$

Hinweis: Gemäß Satz 2.13 gilt $\mathcal{F} \models \beta$ genau dann, wenn $\mathcal{F} \cup \{\neg\beta\}$ unerfüllbar ist. Daher hätte man hier auch analog zu Aufgabe 1 (b) (ii) und (iii) zeigen können, dass die Formelmenge

$$\{\alpha, \alpha \to \beta, \neg\beta\}$$

unerfüllbar ist. Dies gilt natürlich analog auch für die folgenden Teilaufgaben (b) bis (d).

(b)

α	β	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta$	Modell?	$\neg\alpha$
0	0	1	1	+	1
0	1		0	−	
1	0	0		−	
1	1		0	−	

Alternativer Beweis: Zeige, dass $\{\alpha \to \beta, \neg\beta, \alpha\}$ unerfüllbar ist.

(c)

α	β	γ	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \gamma$	Modell?	$\alpha \to \gamma$
0	0	0	1	1	+	1
0	0	1	1	1	+	1
0	1	0		0	−	
0	1	1	1	1	+	1
1	0	0	0		−	
1	0	1	0		−	
1	1	0		0	−	
1	1	1	1	1	+	1

Alternativer Beweis: Zeige, dass $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \neg(\alpha \to \gamma)\}$ unerfüllbar ist. Beachten Sie:

$$\neg(\alpha \to \gamma) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \gamma) \equiv \alpha \wedge \neg\gamma$$

(d)

α	β	γ	$\alpha \to \beta$	$\neg\alpha \to \gamma$	Modell?	$\beta \vee \gamma$
0	0	0		0	−	
0	0	1	1	1	+	1
0	1	0		0	−	
0	1	1	1	1	+	1
1	0	0	0		−	
1	0	1	0		−	
1	1	0	1	1	+	1
1	1	1	1	1	+	1

Alternativer Beweis: Zeige, dass $\{\alpha \to \beta, \neg\alpha \to \gamma, \neg(\beta \vee \gamma)\}$ unerfüllbar ist. Beachten Sie: $\neg(\beta \vee \gamma) \equiv \neg\beta \wedge \neg\gamma$.

(e) Um

$$\{\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma\} \not\models \gamma$$

zu zeigen, müssen wir ein Modell für

$$\{\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma\}$$

finden, in dem $\mathcal{I}(\gamma) = 0$ gilt. Ein solches Modell ist:

α	β	γ	$\neg\alpha \vee \beta$	$\neg\beta \vee \gamma$	Modell?
0	0	0	1	1	+

Alternativer Beweis: Zeige, dass $\{\neg\alpha\vee, \neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma\}$ erfüllbar ist, was natürlich ebenfalls mit der angegebenen Belegung möglich ist.

Aufgabe 3 (Beweis oder Gegenbeispiel)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn α und β Tautologien sind, dann ist auch $\alpha \leftrightarrow \beta$ eine Tautologie.

(b) Wenn α widerspruchsvoll ist, dann ist $(x \vee y) \to \alpha$ unerfüllbar.

(c) Wenn α keine Tautologie ist, dann ist $\neg\alpha$ eine Tautologie.

(d) Wenn $\mathcal{F} \models \alpha$ gilt, dann kann es eine Belegung $\mathcal{I}$ geben, die zwar nicht $\mathcal{F}$ erfüllt, aber α.

(6 Punkte)

Lösung:

(a) Wenn α und β Tautologien sind, dann gilt $\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta) = 1$ für jede Belegung $\mathcal{I}$. Damit erhalten wir für eine beliebige Belegung $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^*(\alpha \leftrightarrow \beta) &= \mathcal{I}^*((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)) \quad \text{(wegen Folgerung 2.6)} \\
&= \min\{\mathcal{I}^*(\alpha \to \beta), \mathcal{I}^*(\beta \to \alpha)\} \\
&= \min\{\mathcal{I}^*(\neg\alpha \vee \beta), \mathcal{I}^*(\neg\beta \vee \alpha)\} \quad \text{(wegen Folgerung 2.6)} \\
&= \min\{\max\{\mathcal{I}^*(\neg\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}, \max\{\mathcal{I}^*(\neg\beta), \mathcal{I}^*(\alpha)\}\} \\
&= \min\{\max\{1 - \mathcal{I}^*(\alpha), \mathcal{I}^*(\beta)\}, \max\{1 - \mathcal{I}^*(\beta), \mathcal{I}^*(\alpha)\}\} \\
&= \min\{\max\{1 - 1, 1\}, \max\{1 - 1, 1\}\} \\
&= \min\{\max\{0, 1\}, \max\{0, 1\}\} \\
&= \min\{1, 1\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alternativ hätte man auch mit einer Wahrheitstabelle argumentieren können. Wenn α und β Tautologien sind, dann ist in der Wahrheitstabelle nur die Zeile für $\mathcal{I}^*(\alpha) = \mathcal{I}^*(\beta) = 1$ relevant und für diese gilt nach Definnition der Bijunktion $\mathcal{I}^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$.

(b) Die Aussage ist falsch. Begründung mit Wahrheitstabelle für $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(y) = 0$:

x	y	α	$x \vee y$	$(x \vee y) \to \alpha$
0	0	0	0	1

Also ist die Formel $(x \vee y) \to \alpha$ erfüllbar.

(c) Die Aussage ist falsch. Wir betrachten als Beispiel die aussagenlogische Formel x. Diese Formel ist keine Tautologie, denn für $\mathcal{I}(x) = 0$ gilt $\mathcal{I}^*(x) = 0$.

$\neg x$ ist aber auch keine Tautologie, denn für $\mathcal{I}(x) = 1$ gilt $\mathcal{I}^*(\neg x) = 0$.

(d) Die Aussage ist wahr. Da die Aussage eine Existenzaussage ist, genügt ein Beispiel. Hierfür betrachten wir die logische Folgerung aus Aufgabe 2 (a), wonach

$$\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta$$

gilt. Die Wahrheitstabelle

α	β	$\alpha \to \beta$
0	1	1

zeigt, dass $\{\alpha, \alpha \to \beta\}$ nicht erfüllt sein kann, die logische Folgerung β aber sehr wohl.