Lösung zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1 (Binomialkoeffizienten)

Zeigen Sie:

(a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\
&= \binom{n}{n-k}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\underbrace{((n-1)-(k-1))}_{=n-k}!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (Binomische Formel)

(a) Schreiben Sie $(1+x)^6$ aus (als Summe ohne Klammern).

(b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

(c) Zeigen Sie: Für alle $q \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

(d) Berechnen Sie: $13^0 + 13^1 + 13^2 + \cdots + 13^7$.

Lösung:

(a) Wir wenden einfach die binomische Formel an.

$$
\begin{aligned}
(1+x)^6 &= \binom{6}{0} 1^6 x^0 + \binom{6}{1} 1^5 x^1 + \binom{6}{2} 1^4 x^2 + \binom{6}{3} 1^3 x^3 + \binom{6}{4} 1^2 x^4 + \binom{6}{5} 1^1 x^5 + \binom{6}{6} 1^0 x^6 \\
&= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6
\end{aligned}
$$

(b) Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion.

$n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$$

$n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-(k-1)} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-(k-1)}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}a^0b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}a^{n-k}b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+1}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-(k-1)}b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k
\end{aligned}
$$

(c) Am naheliegensten ist natürlich wieder die vollständige Induktion.

$n = 0$:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{0} q^k = (1-q)\cdot q^0 = 1-q = 1-q^{0+1}$$

$n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
(1-q)\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= (1-q)\cdot\left(q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k\right) \\
&= (1-q)q^{n+1} + (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1} \\
&= 1 - q^{n+2}.
\end{aligned}
$$

Man kann die Aussage aber auch ohne vollständige Induktion beweisen. Dieser Beweis ist sogar deutlich kürzer.

$$
\begin{aligned}
(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n}(1-q)q^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) \\
&= (q^0 - q^1) + (q^1 - q^2) + \cdots + (q^n - q^{n+1}) \\
&= 1 - q^{n+1}.
\end{aligned}
$$

(d) Wenn wir in der Formel aus (c) durch $1-q$ dividieren erhalten wir für $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $q = 13$ und $n = 7$ erhalten wir damit

$$13^0 + \cdots + 13^7 = \sum_{k=0}^{7} 13^k = \frac{1 - 13^8}{1 - 13} = \frac{815730720}{12} = 67977560.$$

Aufgabe 3 (Schubfachprinzip)

(a) Zeigen Sie: Unter je fünf Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens $1/2$ ist.

(b) Unter je 17 Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens d ist.

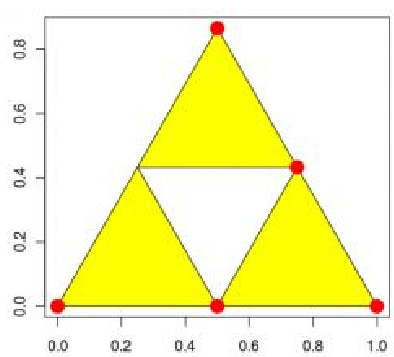
Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für d und zeigen Sie mit diesem Wert die Gültigkeit der Aussage.

(c) Unter je s Punkten in einem Würfel der Seitenlänge 3 gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{3}$ haben.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für s.

Lösung:

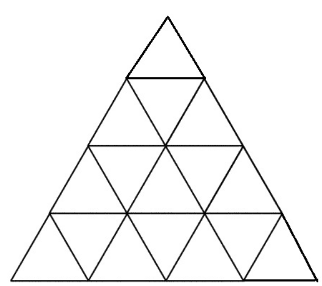
(a) Wir verbinden paarweise die Mittelpunkte der Seiten des gleichseitigen Dreiecks:



Dadurch entstehen vier gleichseitige (Unter-)Dreiecke, deren Seitenlänge stets $1/2$ ist. Zwei Punkte in solch einem Dreieck haben demnach einen Abstand $\leq 1/2$.

Nach dem Schubfachprinzip müssen von fünf Punkten, die in dem umschließenden Dreieck mit Seitenlänge 1 liegen, mindestens zwei Punkte in dem selben Unterdreieck liegen, denn es gibt ja nur vier Unterdreiecke. Diese beiden Punkte haben dann einen Abstand $\leq 1/2$.

(b) Wenn man die vier Unterdreicke aus (a) wieder jeweils durch Halbieren der Seitenlänge unterteilt, entstehen insgesamt 16 gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge $d = 1/4$.



Von 17 Punkten müssen also mindestens zwei im selben Unterdreieck liegen, die dann einen Abstand $\leq 1/4$ haben.

(c) Analog zu den Aufgaben (a) und (b), nur dass hier entlang der drei Würfelachsen unterteilt wird. Jede Achse wird in 3 Teile der Länge 1 unterteilt. Dadurch entstehen $3^3 = 27$ Unterwürfel, deren Raumdiagonale jeweils die Länge $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ hat. Also $s = 28$.

Aufgabe 4 (Schubfachprinzip)

Gegeben seien n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^n a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.

Lösung: Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ hat 2^n verschiedene Teilmengen. Somit hat man 2^n mögliche Indexmengen I für die Summenbildung $\sum_{i \in I} a_i$.

Wir ordnen einer Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ nun die Summe $\sum_{i \in I} a_i$ zu.

N.V. gilt

$$0 \leq \sum_{i \in I} a_i \leq 2^n - 2$$

Damit verteilen sich die 2^n Summen auf $2^n - 1$ verschiedene Werte. Nach dem Schubfachprinzip muss es also zwei Indexmengen J_1 und J_2 geben, mit $J_1 \neq J_2$ und

$$\sum_{i \in J_1} a_i = \sum_{i \in J_2} a_i$$

Für diese beiden Indexmengen muss aber noch nicht, wie verlangt, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ gelten.

Gilt $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, dann konstruieren wir zwei andere Mengen wie folgt:

$$\begin{aligned} I_1 &:= J_1 \setminus J_2 = J_1 \setminus (J_1 \cap J_2) \\ I_2 &:= J_2 \setminus J_1 = J_2 \setminus (J_1 \cap J_2) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in J_1} a_i - \sum_{i \in J_1 \cap J_2} a_i = \sum_{i \in J_2} a_i - \sum_{i \in J_1 \cap J_2} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$$