Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
22. Dezember 2016

# Lösungen zu Aufgabenblatt 12

## Aufgabe 1 (Eigenschaften von Funktionen)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen surjektiv, injektiv bzw. bijektiv sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\lambda(x) = \lambda x$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Unterscheiden Sie $\lambda = 0$ und $\lambda \neq 0$.

(b) $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $g(M) = |M|$ für alle endlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ und $g(M) = \infty$ für alle unendlichen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = xy$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$i(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(je 2 Punkte)

**Lösung:**

(a)
- Für $\lambda = 0$ gilt $f_\lambda(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
  Damit ist $f_\lambda$ nicht injektiv, denn es gilt z. B. $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$ und damit $|f_\lambda^{-1}(0)| > 1$ (vgl. Folgerung 5.44 (a)).
  Weiterhin ist $f_\lambda$ nicht surjektiv, denn es gilt z. B. $f_\lambda^{-1}(1) = \emptyset$ und damit $|f_\lambda^{-1}(1)| < 1$ (vgl. Folgerung 5.44 (b)).
  Weil $f_\lambda$ nicht injektiv bzw. nicht surjektiv ist, ist $f_\lambda$ auch nicht bijektiv.
- Es sei nun $\lambda \neq 0$.
  Surjektivität: Es sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $x = \frac{y}{\lambda}$. Dann gilt:

  $$f_\lambda(x) = f_\lambda\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \lambda \frac{y}{\lambda} = y$$

  Also: $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$. Damit ist $f_\lambda$ surjektiv.
  Injektivität: Sei $x_1 \neq x_2$. O. B. d. A. gelte $x_1 < x_2$ (der andere Fall folgt analog mit $x_1$ und $x_2$ vertauscht).
  * Für $\lambda > 0$ ergibt sich:

    $$x_1 < x_2 \Rightarrow \lambda x_1 < \lambda x_2 \Rightarrow f_\lambda(x_1) < f_\lambda(x_2) \Rightarrow f_\lambda(x_1) \neq f_\lambda(x_2)$$

* Für $\lambda < 0$ ergibt sich:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \lambda x_1 > \lambda x_2 \Rightarrow f_\lambda(x_1) > f_\lambda(x_2) \Rightarrow f_\lambda(x_1) \neq f_\lambda(x_2)$$

Also: $\forall x_1 \forall x_2 : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_\lambda(x_1) \neq f_\lambda(x_2)$. Damit ist $f_\lambda$ injektiv.
Weil $f_\lambda$ surjektiv und injektiv ist, ist die Funktion auch bijektiv.

(b) Surjektivität: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ beliebig.

- $n = 0$: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g(\emptyset) = 0 = n$.
- $n \in \mathbb{N}$: Es gilt $\{1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g(\{1, 2, \dots, n\}) = n$.
- $n = \infty$: Es gilt $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g(\mathbb{N}) = \infty = n$.

Also ist $g$ surjektiv.

Injektivität: Es gilt $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g(\{1\}) = g(\{2\}) = 1$. Also ist $g$ nicht injektiv und damit auch nicht bijektiv.

(c) Surjektivität: Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $x = 1$ und $y = z$. Damit gilt:

$$h(x, y) = h(1, z) = 1z = z$$

Also ist $h$ surjektiv.

Injektivität: Es gilt:

$$h(2, 1) = 2 \cdot 1 = 2 = 1 \cdot 2 = h(1, 2)$$

Also ist $h$ nicht injektiv und damit auch nicht bijektiv.

(d) Surjektivität:

- Für $x \geq 0$ gilt $i(x) = 2x + 1 \geq 1 > 0$.
- Für $x < 0$ gilt $i(x) = \frac{1}{2}x - 1 < -1 < 0$.

Also: $\forall x \in \mathbb{R} : i(x) \neq 0$. Damit ist $i$ nicht surjektiv.

Injektivität: Sei $x_1 \neq x_2$. O. B. d. A. gelte $x_1 < x_2$.

- Gelte $x_1 < x_2 < 0$. Damit ergibt sich:

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 - 1 < \frac{1}{2}x_2 - 1 \Rightarrow i(x_1) < i(x_2) \Rightarrow i(x_1) \neq i(x_2)$$

- Gelte $x_1 < 0 \leq x_2$. Damit ergibt sich:

$$x_1 < 0 \leq x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 - 1 < 0 \leq 2x_2 + 1 \Rightarrow i(x_1) < i(x_2) \Rightarrow i(x_1) \neq i(x_2)$$

- Gelte $0 \leq x_1 < x_2$. Damit ergibt sich:

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow i(x_1) < i(x_2) \Rightarrow i(x_1) \neq i(x_2)$$

Damit ist $i$ injektiv.

## Aufgabe 2 (Komposition von Relationen)

(a) Seien $A, B, C$ Mengen und $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq B \times C$ Relationen. Zeigen Sie:

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

(b) Seien $A, B$ Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Zeigen Sie:

$$R \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$$

(je 2 Punkte)

**Lösung:**

(a)

$$\begin{aligned}
(x,z) \in R \circ (S \cup T) &\Leftrightarrow \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \cup T \\
&\Leftrightarrow \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge ((y,z) \in S \vee (y,z) \in T) \\
&\Leftrightarrow \exists y \in B : ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S) \vee ((x,y) \in R) \wedge (y,z) \in T) \\
&\Leftrightarrow (\exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S) \vee (\exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in T) \\
&\Leftrightarrow ((x,z) \in R \circ S) \vee ((x,z) \in R \circ T) \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)
\end{aligned}$$

(b) Wir führen den Beweis in beide Richtungen indirekt, d. h. wir zeigen die äquivalente Aussage:

$$R \text{ ist nicht injektiv } \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \not\subseteq \mathrm{id}_A$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
R \circ R^{-1} \not\subseteq \mathrm{id}_A &\Leftrightarrow \exists (x,z) \in R \circ R^{-1} : x \neq z \\
&\Leftrightarrow \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R^{-1} \wedge x \neq z \\
&\Leftrightarrow \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (z,y) \in R \wedge x \neq z \\
&\Leftrightarrow R \text{ ist nicht injektiv}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3 (Bild und Urbild)

Es sei $f : M \to N$, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$.

(a) Zeigen Sie:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

(b) Gilt auch $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$? Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.

(c) Zeigen Sie:

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(je 2 Punkte)

**Lösung:**

(a)

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A_1 \cap A_2) & \Rightarrow & \exists x \in A_1 \cap A_2 : f(x) = y \\ & \Rightarrow & \exists x : x \in A_1 \cap A_2 \wedge f(x) = y \\ & \Rightarrow & \exists x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge f(x) = y \\ & \Rightarrow & \exists x : (x \in A_1 \wedge f(x) = y) \wedge (x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\ & \overset{(*)}{\Rightarrow} & (\exists x : x \in A_1 \wedge f(x) = y) \wedge (\exists x : x \in A_2 \wedge f(x) = y) \\ & \Rightarrow & (\exists x \in A_1 : f(x) = y) \wedge (\exists x \in A_2 : f(x) = y) \\ & \Rightarrow & y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \\ & \Rightarrow & y \in f(A_1) \cap f(A_2) \end{array}$$

Hinweis: Die mit $(*)$ markierte Implikation ist keine Äquivalenz. Diese logische Umformung gilt also nicht in die Rückrichtung.

(b) Genau wegen $(*)$ würde ein Beweis der Rückrichtung scheitern. Also:

$$f(A_1) \cap f(A_2) \not\subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

Beispiel: $A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{b, c\}$ und $f(a) = f(c) = 1, f(b) = 2$. Damit gilt:

$$\begin{array}{rcl} f(A_1) & = & f(\{a, b\}) = \{1, 2\} \\ f(A_2) & = & f(\{b, c\}) = \{1, 2\} \\ f(A_1) \cap f(A_2) & = & \{1, 2\} \\ f(A_1 \cap A_2) & = & f(\{b\}) = \{2\} \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) & \Leftrightarrow & f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ & \Leftrightarrow & (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2) \\ & \Leftrightarrow & (x \in f^{-1}(B_1)) \vee (x \in f^{-1}(B_2)) \\ & \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{array}$$

## Aufgabe 4 (Reflexiv-transitive Hülle, Zusatzaufgabe)

Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $xRy :\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P} : y = px$.

Zeigen Sie:

$$R^* = \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$$

Hinweise:

- Für den Beweis von $R^* \subseteq \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$ zeigen Sie:

  $$\forall n \in \mathbb{N}_0 : R^n \subseteq \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$$

  Den Nachweis dieser Aussage führen z. B. mittels vollständiger Induktion.

- Für $R^* \supseteq \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$ hilft an geeigneter Stelle eine Primfaktorzerlegung. (4 Zusatzpunkte)

**Lösung:**

"$\subseteq$": Wie im Hinweis angegeben, zeigen wir

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : R^n \subseteq \{\,(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$$

mittels vollständiger Induktion. Aus dieser Aussage folgt dann direkt

$$R^* \subseteq \{\,(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}.$$

$n = 0$: Nach Definition gilt $R^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $n|n$. Also:

$$R^0 \subseteq \{\,(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$$

$n \to n+1$: Zur Erinnerung: $R^{n+1} = R \circ R^n$.

$$\begin{aligned} (x,z) \in R^{n+1} &\Rightarrow \exists y \in \mathbb{N} : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R^n \\ &\overset{I.V.}{\Rightarrow} \exists y \in \mathbb{N} : y = px \wedge y|z \\ &\Rightarrow \exists y \in \mathbb{N} : x|y \wedge y|z \\ &\Rightarrow x|z \end{aligned}$$

Also: $R^{n+1} \subseteq \{\,(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

"$\supseteq$":

$$(x,y) \in \{\,(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } y\} \Rightarrow x|y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} : y = px$$

Für $p \in \mathbb{N}$ existiert nun eine eindeutige Primzahlfaktorisierung, d. h. es existieren $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{P}$ mit $p = p_n \cdot \ldots \cdot p_1$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y = p_n \cdot \ldots \cdot p_1 x \\ &\Rightarrow (x, p_1 x) \in R \\ &\Rightarrow (x, p_2 p_1 x) \in R^2 \\ &\vdots \\ &\Rightarrow (x, p_n \cdot \ldots \cdot p_1 x) \in R^n \\ &\Rightarrow (x,y) \in R^n \\ &\Rightarrow (x,y) \in R^* \end{aligned}$$

## Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $G = \{1, \ldots, 2^n\} \times \{1, \ldots, 2^n\}$ ein $2^n \times 2^n$-Gitter.

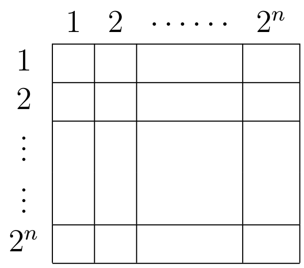
Beweisen Sie die folgende Aussage:

Für ein beliebiges $z \in G$ kann die Menge $G \setminus \{z\}$ als disjunkte Vereinigung von Mengen der Form $\{(x,y),(x,y+1),(x+1,y)\}$, $\{(x,y),(x,y-1),(x+1,y)\}$, $\{(x,y),(x,y+1),(x-1,y)\}$ und $\{(x,y),(x,y-1),(x-1,y)\}$ dargestellt werden.

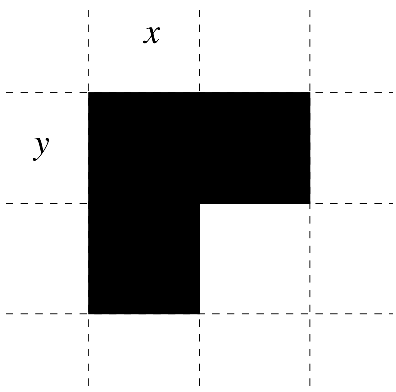
Hinweis: Skizzieren Sie das Problem graphisch und verwenden Sie vollständige Induktion.

(6 Zusatzpunkte)

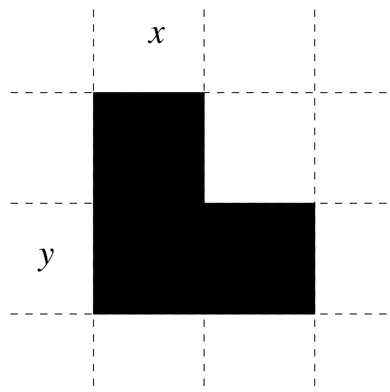
**Lösung:** Für unsere grafischen Darstellungen gehen wir davon aus, dass die Position $(1, 1)$ im Gitter links oben und die Position $(2^n, 2^n)$ rechts unten liegt. Die $y$-Koordinate wächst also nach unten statt nach oben (wie z. B. auch bei Bildschirmkoordinatensystemen).



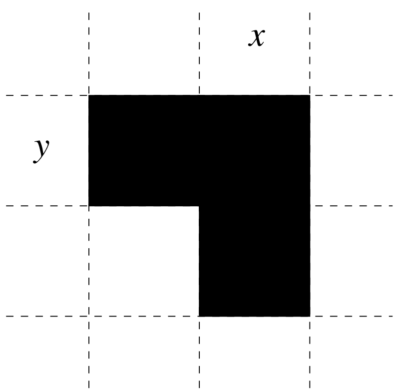

Die vier Formen haben dann das folgende Aussehen:



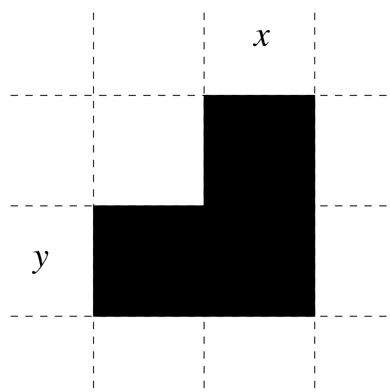

$\{(x, y), (x, y + 1), (x + 1, y)\}$




$\{(x, y), (x, y - 1), (x + 1, y)\}$




$\{(x, y), (x, y + 1), (x - 1, y)\}$

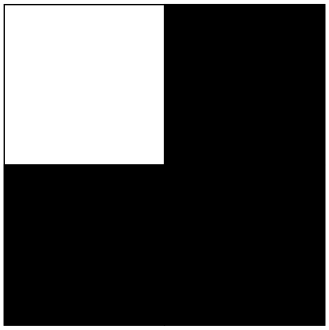



$\{(x, y), (x, y - 1), (x - 1, y)\}$

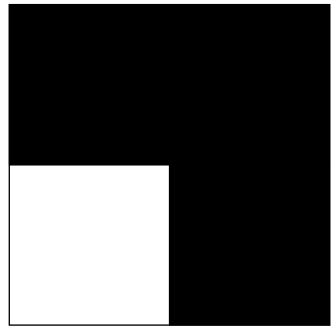
Anschaulich ausgedrückt lautet die zu beweisende Aussage, dass man für jedes Gitter der Größe $2^n \times 2^n$ und für jede beliebige Position $(x, y) \in \{1, \ldots, 2^n\} \times \{1, \ldots, 2^n\}$ eine disjunkte Überdeckung mit solchen L-Formen findet, so dass genau das Feld an Position $(x, y)$ frei bleibt.

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

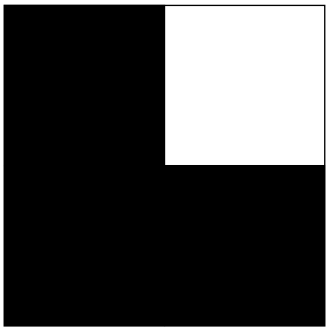
$n = 1$: Wir haben ein $2 \times 2$-Gitter. Für jedes mögliche freie Feld $z = (1, 1)$, $z = (1, 2)$, $z = (2, 1)$ oder $z = (2, 2)$ wählen wir einfach die passende L-Form aus:



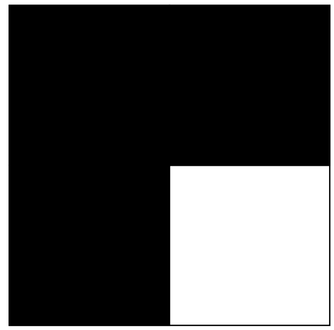
$z = (1, 1)$



$z = (1, 2)$



$z = (2, 1)$



$z = (2, 2)$

$n \to n+1$: Wir haben ein Gitter

$$G = \{1, \ldots, 2^{n+1}\} \times \{1, \ldots, 2^{n+1}\}$$

der Größe $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Wir partitionieren $G$ in vier Teile der Größe $2^n \times 2^n$:

$$\begin{aligned}
G_1 &:= \{1, \ldots, 2^n\} \times \{1, \ldots, 2^n\} \\
G_2 &:= \{1, \ldots, 2^n\} \times \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\} \\
G_3 &:= \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\} \times \{1, \ldots, 2^n\} \\
G_4 &:= \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\} \times \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\}
\end{aligned}$$

Damit gilt $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$, d. h. $G$ ist die disjunkte Vereinigung von $G_1, \ldots, G_4$.

O. B. d. A. gelte $z \in G_1$ (die anderen Fälle folgen analog).

- Nach I.V. kann $G_1 \setminus \{z\}$ als disjunkte Vereinigung der L-Formen dargestellt werden.
- Nach I.V. kann $G_2 \setminus \{(2^n, 2^n + 1)\}$ als disjunkte Vereinigung der L-Formen dargestellt werden.
- Nach I.V. kann $G_3 \setminus \{(2^n + 1, 2^n)\}$ als disjunkte Vereinigung der L-Formen dargestellt werden.
- Nach I.V. kann $G_4 \setminus \{(2^n + 1, 2^n + 1)\}$ als disjunkte Vereinigung der L-Formen dargestellt werden.
- In die noch freien Felder an den Positionen $(2^n, 2^n + 1)$, $(2^n + 1, 2^n)$ und $(2^n + 1, 2^n + 1)$ setzen wir ein L-Stück der Form $\{(x, y), (x, y - 1), (x - 1, y)\}$ (mit $x = y = 2^n + 1$).

Damit haben wir $G \setminus \{z\}$ als disjunkte Vereinigung solcher L-Formen dargestellt.