Matrikelnummer

Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen -	**WS 2015 - 2**	**16.03.16**
Prüfungstitel lt. Prüfungsplan	Prüfungszeitraum	Datum

allgemeine Hinweise:

Zeit **08:30-10:00 Uhr**

zugelassene Hilfsmittel keine

- Füllen Sie das Deckblatt vollständig aus und beschriften Sie alle Aufgabenblätter mit Ihrer Matrikelnummer (oben links).
- Unterschreiben Sie dieses Deckblatt an der dafür vorgesehenen Stelle und bestätigen Sie damit, dass Sie die Prüfungsaufgaben selbständig und ohne unzulässige Hilfsmittel bearbeitet haben. Ohne Unterschrift wird die Klausur mit 0 Punkten bewertet.
- Überprüfen Sie Ihr Klausur-Exemplar vor Beginn der Klausur auf Vollständigkeit.
- Halten Sie Ihren Lichtbildausweis sowie den Studentenausweis zur Kontrolle bereit.
- Verwenden Sie nur dokumentenechte Schreibgeräte (**keinen Bleistift**). Die Verwendung von roter Farbe ist nicht gestattet !
- Falls der Platz für die Beantwortung der Fragen nicht ausreichen sollte, verwenden Sie bitte die Rückseite und notieren Sie die Aufgabennummer. Sofern Sie Zusatzblätter verwenden, tragen Sie die Anzahl ein. Andernfalls wird im Zweifelfalle davon ausgegangen, dass keine Zusatzblätter verwendet wurden.
- Die Prüfung ist mit mindestens 50 % der Punkte bestanden, sofern keine andere Festlegung erfolgt.
- Beachten Sie spezielle, weiterführende Hinweise der Prüfer auf den Folgeseiten.
- Eventuell zugelasssene hangeschriebene Formelsammlungen o.ä., sowie die Platzkarten sind zusammen mit der Klausur abzugeben.

Viel Erfolg!

Hiermit bestätige ich meine Prüfungsfähigkeit und erkenne die o.g. Hinweise an.

Name (bitte in Blockschrift)	
Unterschrift	

Bemerkungen :

....

....

....

Die Prüfung wurde mit folgendem Ergebnis abgelegt :

Note

1. Prüfer (Prof. Dr. Becker, Peter)

2. Prüfer (Prof. Dr. Asteroth, Alexander)

Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik

Mathematische Grundlagen

Klausur Wintersemester 2015/16

16. März 2015

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Hinweise:

- Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3+2+2+3=10 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ ist eine Tautologie.

(b) Wenn $\alpha \to \beta$ eine Tautologie ist, dann gilt $\{\alpha\} \models \beta$.

(c) $\neg((p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q) \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q$

(d) Wenn $\alpha \wedge \beta$ erfüllbar ist, dann ist $\neg\alpha \vee \neg\beta$ unerfüllbar.

Aufgabe 2 (4+6=10 Punkte)

Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \neg p \rightarrow (q \vee \neg r) \\
\alpha_2 &= \neg(\neg r \wedge \neg q) \\
\alpha_3 &= \neg p \rightarrow \neg q
\end{aligned}$$

(a) Überführen Sie die Formeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in KNF und geben Sie die zugehörigen Klauseln an.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution: $\mathcal{F} \models p$

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Gegeben Sei die Formelmenge $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x\, \exists y P(x,y) \\
\alpha_2 &= \forall x\, \forall y\, P(x,y) \to \neg P(y,x) \\
\alpha_3 &= P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge P(c,d) \wedge \neg P(d,b)
\end{aligned}$$

Das Universum sei $U = \{a, b, c, d\}$. Geben Sie ein Modell für die Formelmenge $\mathcal{F}$ an.

(b) Gegeben seien zwei Mengen P, Q. Die Zugehörigkeit eines Element x des Universums zu einer dieser Mengen drücken wir durch $P(x)$ bzw. $Q(x)$ aus. Formulieren Sie damit in Prädikatenlogik die folgenden Sachverhalte.

(i) P und Q sind nicht disjunkt.

(ii) Es existiert ein Element, das nicht in beiden Mengen enthalten ist.

(iii) Q ist echte Teilmenge von P.

(iv) Für beide Mengen gilt: Wenn a nicht enthalten ist, dann ist auch b nicht enthalten.

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$$

(b) Die Menge M ist durch die folgenden Regeln definiert:

(i) $11 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $2(x+6)+y-1 \in M$.

(iii) M enthält genau die Elemente, die durch die Regeln (i) und (ii) gebildet werden können.

Zeigen Sie: $\forall x \in M : 11|x$

Aufgabe 5 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sind die folgenden Relationen R_i auf $\mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation oder eine partielle Ordnung? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $R_1 = \{(1,1),(3,3),(5,5)\}$

(b) $R_2 = \{(n,n) | n \in \mathbb{N}\}$

(c) $R_3 = \{(n,m) | n \leq m \leq n+2\}$

(d) $R_4 = \{(n,m) | n \text{ ist Teiler von } m\}$

(e) Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion.
$R_5 = \{(n,m) | f(n) = f(m)\}$

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $f : M \to N$, $A_1, A_2 \subseteq M$. Zeigen Sie:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 3x + 1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Bijektivität.