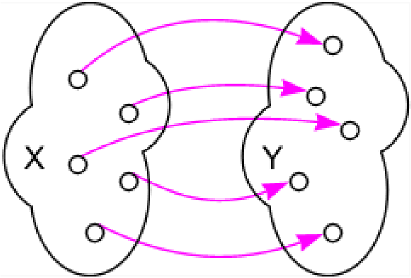
# Kapitel 5

Eigenschaften von Mengen, Relationen und Funktionen



# Inhalt

# Potenzmengen

## Definition 5.1

Sei $M$ eine Menge. Dann heißt

$$\mathcal{P}(M) = \{A | A \subseteq M\}$$

die Potenzmenge von $M$.

**Bemerkungen:**

- Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist also die Menge aller Teilmengen von $M$.
- Es gilt also: $A \in \mathcal{P}(M) :\Leftrightarrow A \subseteq M$.
- Anstelle von $\mathcal{P}(M)$ schreibt man auch $2^M$.

### Beispiel 5.2

Sei $M = \{a, b, c\}$, dann gilt

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

### Folgerung 5.3

*Für jede Menge $M$ gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$.*

### Beweis.

Folgt direkt aus Satz 3.8.

# Kardinalität der Potenzmenge

## Satz 5.4

*Es sei $M$ eine Menge mit $m$ Elementen, also $|M| = m$.*

*Dann hat $\mathcal{P}(M)$ $2^m$ Elemente, also $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.*

## Beweis.

Es sei $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$.

- Zur Konstruktion einer Teilmenge $A$ von $M$ haben wir für jedes Element $a_i$ genau zwei Möglichkeiten:
  - Wir nehmen $a_i$ in $A$ auf, also $a_i \in A$.
  - Wir nehmen $a_i$ nicht auf, also $a_i \notin A$.
- Für jedes $a_i$ können wir diese Entscheidung unabhängig von den anderen Elementen treffen.
- Unterschiedliche Entscheidungen führen zu unterschiedlichen Teilmengen.
- Ergibt insgesamt $2^m$ verschiedene Teilmengen.

# Verknüpfung von Mengen

## Definition 5.5

Es seien $A$ und $B$ zwei Mengen.

(i) Die Menge
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$
heißt Vereinigung von $A$ und $B$.

(ii) Die Menge
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$
heißt Durchschnitt oder Schnittmenge von $A$ und $B$.

(iii) Gilt $A \cap B = \emptyset$, dann heißen $A$ und $B$ disjunkt.

(iv) Die Menge
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$
heißt Differenz von $A$ und $B$.

### Fortsetzung Definition.

(v) Für $A \subseteq B$ heißt $B \setminus A$ das Komplement von $A$ bezüglich $B$. Falls die Menge $B$ aus dem Zusammenhang heraus klar ist, schreiben wir stattdessen $A^C$.

### Beispiel 5.6

Es sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$. Dann gilt:

(i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $A \cap B = \{3, 4\}$

(iii) $A \setminus B = \{1, 2\}$

Es sei nun $B = \mathbb{N}$. Dann gilt

(iv) $A^C = \{5, 6, 7, \ldots\} = \mathbb{N}_5$

# Weitere Schreibweisen für Mengen

Für die Vereinigung bzw. den Durchschnitt von $n$ Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ führen wir folgende Schreibweisen ein:

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i \end{aligned}$$

Dies verallgemeinern wir noch für den Fall, dass die Indizes nicht die Zahlen $1, \ldots, n$ sind, sondern Elemente einer (möglicherweise unendlichen) Indexmenge $I$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

## Beispiel 5.7

Sei

$$T = \{mo, di, mi, do, fr, sa\}$$

eine Indexmenge, und sei $K_t$ die Menge der Kunden, die am Tag $t \in T$ gekauft haben. Dann bezeichnet

$$\bigcup_{t \in T} K_t$$

die Menge der Kunden, die irgendwann mal gekauft haben, und

$$\bigcap_{t \in T} K_t$$

bezeichnet die Menge der Kunden, die jeden Tag gekauft haben.

Da als Indexmenge auch unendliche Mengen erlaubt sind, können wir auch

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

bilden. Hierfür schreiben wir üblicherweise

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

## Beispiel 5.8

Für $i \in \mathbb{N}$ sei $A_i = \{x \in \mathbb{R} | 1 - \frac{1}{i} \leq x \leq 2 + \frac{1}{i}\}$. Dann gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}.$$

# Verknüpfungseigenschaften

## Satz 5.9

*Für alle Mengen $A, B, C$ gelten die folgenden Gesetze:*

*(1) Kommutativität:*

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

*(2) Für $A \subseteq B$ gilt:*

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \\ A \cap B &= A \\ A \setminus B &= \emptyset \end{aligned}$$

*(3) Idempotenz:*

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

*(4) Aus (1) bis (3) folgt:*

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \setminus A &= \emptyset \\ \emptyset \setminus A &= \emptyset \\ A \setminus \emptyset &= A \end{aligned}$$

## Fortsetzung Satz.

(5) Für $\cup, \cap, \setminus$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} A & \subseteq & A \cup B \\ B & \subseteq & A \cup B \\ A \cap B & \subseteq & A \\ A \cap B & \subseteq & B \\ A \setminus B & \subseteq & A \end{array}$$

(6) Assoziativität:

$$\begin{array}{rcl} A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C \end{array}$$

(7) Distributivität:

$$\begin{array}{rcl} A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}$$

(8) De Morgansche Regeln:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

(9) Absorptionsgesetze:

$$\begin{array}{rcl} A \cup (B \cap A) & = & A \\ A \cap (B \cup A) & = & A \end{array}$$

(10) Doppelte Komplementbildung:

$$\left(A^C\right)^C = A$$

**Bemerkung:**

- Beachten Sie: Die Verknüpfungseigenschaften von Mengen sind sehr ähnlich zu den logischen Äquivalenzen in der Aussagenlogik (siehe Satz 2.24).
- Dies ist kein Zufall.

Beweis.

- Mit Ausnahme der Eigenschaft (5) ist immer die Gleichheit von Mengen zu zeigen.
- Zwei Mengen sind nach Definition gleich, wenn jede Teilmenge der anderen ist.
- Mit dieser Methode zeigen wir die erste Gleichheit von (8).
- Alle anderen Beweise sind Übung und teilweise Übungsaufgabe.
- Fast alle Gleichheiten lassen sich auf die Bedingungen zurückführen, mithilfe derer die Mengenoperationen definiert sind (siehe Definition 5.5).

## Fortsetzung Beweis.

Wir zeigen $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^C &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow \neg(x \in A \cup B) \\ &\Rightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^C \wedge x \in B^C \\ &\Rightarrow x \in A^C \cap B^C \end{aligned}$$

Der Beweis von $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$ erfolgt durch Umkehrung der Implikationen.

# Partition

## Folgerung 5.10

(i) *Für zwei endliche Mengen $A$ und $B$ gilt:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(ii) *Sind $A$ und $B$ endlich und disjunkt, dann gilt:*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

## Definition 5.11

Sei $A$ eine nicht leere Menge, $I$ eine Indexmenge und $A_i \subseteq A, i \in I$, eine Familie von nicht leeren Teilmengen von $A$.
Dann heißt $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Partition von $A$ genau dann, wenn gilt:

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i, j \in I$ mit $i \neq j$,

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

## Beispiel 5.12

(i) Für $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist $\{A_i\}_{i \in \{1,2,3\}}$ mit $A_1 = \{1, 4, 6\}$, $A_2 = \{2\}$ und $A_3 = \{3, 5\}$ eine Partition.

(ii) Die Mengen $\mathbb{G}_+$ und $\mathbb{U}_+$ bilden eine Partition von $\mathbb{N}_0$.

(iii) Die Mengen

$$\begin{array}{rclcl} [0]_3 & = & \{0, 3, 6, \ldots\} & = & \{z | z = 3k, k \in \mathbb{N}_0\} \\ [1]_3 & = & \{1, 4, 7, \ldots\} & = & \{z | z = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0\} \\ [2]_3 & = & \{2, 5, 8, \ldots\} & = & \{z | z = 3k + 2, k \in \mathbb{N}_0\} \end{array}$$

bilden eine Partition von $\mathbb{N}_0$.

# Verfeinerung einer Partition

## Definition 5.13

Es gelten die Bezeichnung von Definition 5.11. Außerdem sei $J \subseteq I$ eine weitere Indexmenge und $\{B_j\}_{j \in J}$ eine weitere Partition von $A$.

Dann heißt die Partition $\{A_i\}_{i \in I}$ feiner als die Partition $\{B_j\}_{j \in J}$, falls zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ existiert mit $A_i \subseteq B_j$.

Weiterhin heißt dann $\{B_j\}_{j \in J}$ gröber als $\{A_i\}_{i \in I}$.

## Beispiel 5.14

Die Mengen

$$[i]_6 = \{z | z = 6k + i, k \in \mathbb{N}_0\}$$

für $0 \leq i \leq 5$ bilden eine feinere Partition von $\mathbb{N}_0$ als die Partition von Beispiel 5.12.