Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Mathematische Grundlagen
Prof. Dr. Peter Becker
Fachbereich Informatik
Wintersemester 2016/17
1. Dezember 2016

Aufgabenblatt 9

Hinweise:

- Abgabe der handschriftlichen Lösungen bis spätestens **Donnerstag, 8. Dezember 2016, 10:30 Uhr** (vor der Vorlesung) in **Postfach 110** gegenüber dem Fachbereichssekretariat.
- Geben Sie deutlich lesbar Ihre **Matrikelnummer** an (Namen sind optional).
- Heften Sie Ihre Blätter zusammen!

Aufgabe 1 (Fibonacci-Zahlen)

Zeigen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ (2 Punkte)

(b) $2|F_{3n}$ für $n \geq 1$ (2 Punkte)

Aufgabe 2 (Explizite Formel für eine rekursiv definierte Zahlenfolge)

Die *Pell-Zahlen* P_n sind für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$P_0 = 0, P_1 = 1, P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3 (Strukturelle Induktion)

(a) Die Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

(i) $5 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann auch $2x + y \in M$.

(iii) Gilt $x, y \in M$, dann auch $x + y + 1 \in M$.

Zeigen Sie: $\forall m \in M : 2 \nmid m$ (4 Punkte)

(b) Die formale Sprache $\mathcal{S}$ sei über dem Alphabet $\{\bigcirc, \square\}$ wie folgt definiert:

(i) $\bigcirc \in \mathcal{S}$ und $\bigcirc\square\bigcirc \in \mathcal{S}$

(ii) Gilt $r, s \in \mathcal{S}$, dann gilt auch $r \square \bigcirc \square s \in \mathcal{S}$.

Zeigen Sie: Jedes $s \in \mathcal{S}$ enthält mehr $\bigcirc$ als $\square$. (4 Punkte)