Vollständige Induktion

- Angenommen, wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
- Anders ausgedrückt: Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

- Hierzu können wir die Technik der vollständigen Induktion verwenden.
  - Wir zeigen, dass $P(1)$ gilt.
  - Wir zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Induktionsbeweis

Ein Beweis mit vollständiger Induktion verläuft dementsprechend nach folgendem Schema:

- Induktionsanfang
  Zeige, dass $P(1)$ gilt.
- Induktionsschritt
  Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$
- Die Aussage $P(n)$ heißt dabei Induktionsvoraussetzung oder Induktionsannahme.
- Die Aussage $P(n+1)$ ist die Induktionsbehauptung.

Warum funktioniert vollständige Induktion?

Wir haben:

- $P(1)$
- $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Angewendet auf den Induktionsanfang $P(1)$ und den Induktionsschritt für $n = 1$ erhalten wir mithilfe des Modus Ponens:

$$(P(1) \wedge (P(1) \Rightarrow P(2))) \Rightarrow P(2)$$

Jetzt verwenden wir $P(2)$ und den Induktionsschritt für $n = 2$:

$$(P(2) \wedge (P(2) \Rightarrow P(3))) \Rightarrow P(3)$$

Dies können wir immer weiter fortsetzen.

Summationssymbol

- Zur Notation der Summe von mehreren Summanden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verwenden wir das Summationssymbol $\sum$:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Der Summationsindex kann dabei auch zwischen $u, o \in \mathbb{N}_0$ laufen:

$$x_u + x_{u+1} + \ldots + x_o = \sum_{i=u}^{o} x_i$$

- u heißt untere und o obere Index- oder Summationsgrenze.
- Für den Fall $u > o$ legen wir fest:

$$\sum_{i=u}^{o} x_i = 0$$

Beispiel 4.5

Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist diese Gleichung entweder wahr oder falsch. Also stellt diese Gleichung ein Prädikat $P(n)$ dar.

Wir wollen zeigen, dass die Gleichung (und damit das Prädikat $P(n)$) für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

- Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also gilt die Gleichung für $n = 1$, d. h. $P(1)$ ist wahr.

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Induktionsschritt: $n \to n+1$

Gemäß Induktionsvoraussetzung (I.V.) dürfen wir $P(n)$ als wahr annehmen, d. h. die Gleichung gilt für n.

Wir müssen nun zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt, also dass auch $P(n+1)$ wahr ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \\
&\stackrel{\text{I.V.}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Damit haben wir nun bewiesen, dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Verschiebung des Induktionsanfangs

- Was tun, wenn ein Prädikat nicht ab $n = 1$ sondern erst ab $n = k$ wahr ist?
- Wir definieren ein neues Prädikat Q mit

$$Q(n) :\Leftrightarrow P(n + k - 1)$$

- Somit gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_k : P(n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : Q(n)$$

- Praktisch genügt es, einfach den Induktionsanfang auf k zu legen.
- Dies geht natürlich auch in die andere Richtung. Um

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : R(n)$$

zu zeigen, legen wir den Induktionsanfang auf $n = 0$.

Beispiel 4.6

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Fortsetzung Beispiel.

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$7^n - 1 \text{ ist ein Vielfaches von } 6$$

(v) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt:

$$n! > 2^n$$

Beweise an der Tafel. ✎

Fibonacci-Zahlen

Definition 4.7

Die Fibonacci-Zahlen F_n sind für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Leonardo da Pisa

Auch Fibonacci genannt (1170–1240), war Rechenmeister in Pisa und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Die Fibonacci-Zahlen gehen auf eine Übungsaufgabe von Fibonacci zur Vermehrung von Kaninchen zurück.

Formel von Moivre-Binet

Satz 4.8

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Beweis.

Mittels vollständiger Induktion, Übungsaufgabe.

- Der Beweis für die Korrektheit einer expliziten Formel ist i.d.R. viel einfacher als die Herleitung solch einer expliziten Formel.
- Im nächsten Semester lernen Sie einen ersten Ansatz zur Herleitung solch expliziter Formeln kennen.

Strukturelle Induktion

- Wir können vollständige Induktion auch anwenden, um zu zeigen, dass eine Eigenschaft $P(x)$ für alle Elemente einer rekursiv definierten Menge M gilt.
- Der Induktionsanfang entspricht dabei dem Nachweis, dass $P(x)$ für alle explizit angegebenen Elemente von M gilt und
- der Induktionsschritt entspricht dem Nachweis, dass $P(y)$ gilt, wenn sich y aus den Elementen $x_1, \ldots, x_k \in M$ erzeugen lässt.
- Dabei dürfen wir $P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_k)$ als Induktionsvoraussetzung annehmen.

Beispiel 4.9

Wir betrachten die Menge M, die definiert ist durch:

(i) $7 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $3x \in M$ und $x + y \in M$.

Wir wollen zeigen, dass alle Elemente von M durch 7 teilbar sind, also:

$$\forall x \in M : 7|x$$

Induktionsanfang: $7|7$ ist wahr.
Induktionsschritt: Es gelte $x, y \in M$. Mit Induktionsvoraussetzung folgt $7|x$ und $7|y$, d. h.

$$\exists a \in \mathbb{N} : 7a = x$$
$$\exists b \in \mathbb{N} : 7b = y$$

Aus der ersten Aussage folgt $7 \cdot 3a = 3x$, also gilt auch $7|3x$.

Fortsetzung Beispiel.

Wenn wir die Gleichungen der beiden Aussagen addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} & 7a + 7b = x + y \\ \Rightarrow \quad & 7(a + b) = x + y \end{aligned}$$

Also gilt auch $7|(x + y)$.

Bemerkungen:

- Die Induktion geht hier über die Anzahl der Ableitungsschritte, um ein Element x herzuleiten.
- Wir beweisen praktisch, dass die Aussage

  $Q(n) \quad :\Leftrightarrow \quad$ Eigenschaft P gilt für alle Elemente, die mit n Schritten abgeleitet werden können

  für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Strukturelle Induktion für formale Sprachen

- Die wichtigsten Mengen in der Informatik, die rekursiv definiert sind, sind formale Sprachen.
- Strukturelle Induktion erlaubt es uns nun, Spracheigenschaften induktiv entlang der Syntaxregeln nachzuweisen.

Beispiel 4.10

Wir wollen zeigen:

In jeder aussagenlogischen Formel ist die Anzahl der öffnenden Klammern gleich der Anzahl der schließenden Klammern.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Notation ein:

Für ein Zeichen c und eine aussagenlogische Formel α bezeichnet α_c die Anzahl der Vorkommen von c in α.

Die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln ist rekursiv definiert (siehe Folie 43).

Induktionsanfang: Atomare Formeln sind die aussagenlogischen Konstanten 0 und 1 und die Aussagenvariablen. Diese Formeln enthalten keine Klammern, also

$$\begin{array}{ccccc} 0_(& = & 0 & = & 0_) \\ 1_(& = & 0 & = & 1_) \\ x_(& = & 0 & = & x_) \text{ für alle } x \in V \end{array}$$

Fortsetzung Beispiel.

Somit gilt die zu beweisende Aussage für alle atomaren Formeln.
Induktionsschritt: Für gegebene Formeln $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ können gemäß Definition von $\mathcal{A}$ die Formeln

$$\gamma = (\alpha \wedge \beta), \delta = (\alpha \vee \beta), \epsilon = \neg\alpha$$

gebildet werden.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\alpha_(= \alpha_)$ und $\beta_(= \beta_)$.
Wir erhalten

$$\gamma_(= \alpha_(+ \beta_(+ 1 = \alpha_) + \beta_) + 1 = \gamma_)$$

$$\delta_(= \alpha_(+ \beta_(+ 1 = \alpha_) + \beta_) + 1 = \delta_)$$

$$\epsilon_(= \alpha_(= \alpha_) = \epsilon_)$$

Damit ist der Induktionsschritt für alle Fälle bewiesen.

Zusammenfassung

- Beweisverfahren: direkter Beweis, indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Ringschluss
- Vollständige Induktion um zu zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
- vollständige Induktion = Induktionsanfang plus Induktionsschritt
- Induktionsanfang kann verschoben werden, um die Gültigkeit von $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_k$ zu zeigen.
- Strukturelle Induktion: Vollständige Induktion für formale Sprachen