Beweise zu Beispiel 4.6

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis:

$n = 0$:

$$\sum_{i=1}^{0} i^2 = 0 = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(6(n+1) + n(2n+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(6n + 6 + n(2n+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(4n + 6 + n(2n+3)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

Beweis:

$n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= (2(n+1)-1)+\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 2n+1+n^2\\ &= n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Beweis:

$n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{x-1}{x-1} = \frac{x^{0+1}-1}{x-1}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} x^i &= x^{n+1}+\sum_{i=0}^{n} x^i\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} x^{n+1}+\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\\ &= \frac{x^{n+1}(x-1)+x^{n+1}-1}{x-1}\\ &= \frac{x^{n+2}-x^{n+1}+x^{n+1}-1}{x-1}\\ &= \frac{x^{n+2}-1}{x-1}\end{aligned}$$

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$6|(7^n-1)$$

Beweis:

$n = 1$:

$$7^1-1 = 7-1 = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 1\cdot(7^1-1) \quad \Rightarrow \quad 6|(7^1-1)$$

$n \to n+1$: Aus der Induktionsvoraussetzung $6|(7^n-1)$ folgt:

$$\exists a \in \mathbb{N} : 6 \cdot a = 7^n - 1$$

Dies nutzen wir weiter unten.

$$\begin{aligned}7^{n+1}-1 &= 7^{n+1}-7^n+7^n-1\\ &= \left(7^{n+1}-7^n\right)+(7^n-1)\\ &= 7^n(7-1)+(7^n-1)\\ &= 6\cdot 7^n+(7^n-1)\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 6\cdot 7^n+6\cdot a\\ &= 6(7^n+a)\end{aligned}$$

Also existiert $b = 7^n + a \in \mathbb{N}$ mit $6 \cdot b = 7^{n+1} - 1$.

$$\Rightarrow 6 | (7^{n+1} - 1)$$

(v) Für alle $n \in \mathbb{N}_4$ gilt:

$$n! > 2^n$$

Beweis:

$n = 4$:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 > 16 = 2^4$$

$n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \\ &\overset{\text{I.V.}}{>} 2^n \cdot \underbrace{(n+1)}_{\geq 5 > 2} \\ &> 2^n \cdot 2 \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$