Gleichmächtige Mengen

Definition 6.17

- Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig genau dann, wenn eine bijektive Funktion $f : A \to B$ existiert.
- Sind die Mengen A und B gleichmächtig, dann schreiben wir dafür auch $|A| = |B|$.
- Wir notieren $|A| \leq |B|$ und nennen A höchstens gleichmächtig zu B genau dann, wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt,
- und wir notieren $|A| < |B|$ und nennen B mächtiger als A genau dann, wenn $|A| \leq |B|$ und $|A| \neq |B|$ gelten.

Diskussion

- Eine Folgerung aus dem Bijektionsprinzip ist, dass endliche Mengen genau dann gleichmächtig sind, wenn sie die gleiche Anzahl an Elementen haben (siehe Satz 6.13).
- Somit verallgemeinert Definition 6.17 den Vergleich von Mengenkardinalitäten auf nicht endliche Mengen.
- Aus $|A| = \infty$ und $|B| = \infty$ können wir nicht $|A| = |B|$ schließen.
- In der Definition von mächtiger ist ganz wesentlich, dass dort $|A| \neq |B|$ steht, und nicht $A \neq B$.
- Anders ausgedrückt: A ist mächtiger als B bedeutet, dass es zwar eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt, aber keine bijektive.

Beispiel 6.18

(i) Obwohl $\mathbb{N}_0$ ein Element mehr als $\mathbb{N}$ enthält, gilt

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|,$$

denn $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = n + 1$$

ist eine bijektive Abbildung.

(ii) Es gilt sogar $|\mathbb{G}_+| = |\mathbb{N}_0|$, denn $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{G}_+$ mit

$$f(n) = 2n$$

ist bijektiv.

Fortsetzung Beispiel.

(iii) Ebenso gilt $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$. Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z = 0 \\ 2z & \text{falls } z > 0 \\ -(2z+1) & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

Cantorsche Tupelfunktion

Satz 6.19

Es gilt:

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|.$$

Anschauliche Begründung:

1	1		2		3		4	...	q	...
1	1		2		4		7			
		$\swarrow$		$\swarrow$		$\swarrow$				
2	3		5		8					
		$\swarrow$		$\swarrow$						
3	6		9							
		$\swarrow$								
4	10									
$\vdots$										
p										
$\vdots$										

Beweis.

Wir konstruieren eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Sei $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Welche Nummer bekommt (i,j)?

- (i,j) liegt in der $i+j-1$-ten Diagonale.
- Wie viele Paare sind in den Diagonalen $1, \ldots, i+j-1$? Antwort:

$$\sum_{k=1}^{i+j-1} k = \frac{(i+j-1)(i+j)}{2}$$

- Damit erhält das Paar $(i+j-2, 1)$ die Nummer $\frac{(i+j-1)(i+j)}{2}$.
- Für größere Werte von j in der gleichen Diagonalen verringert sich diese Nummer entsprechend.
- Also erhält (i,j) die Nummer

$$f(i,j) = \frac{(i+j-1)(i+j)}{2} - (j-1).$$

Definition 6.20

Es sei f die Funktion aus dem Beweis von Satz 6.19.

Die Funktion

$$c_2 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

mit

$$c_2(i,j) = f(i,j+2) = \frac{(i+j+1)(i+j+2)}{2} - (j+1)$$

heißt Cantorsche Paarungsfunktion.

- Die Cantorsche Paarungsfunktion definiert eine bijektive Abbildung.
- Auf Basis von c_2 können wir allgemein bijektive Abbildungen $c_k : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ wie folgt definieren:

$$c_{k+1}(i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}) = c_2(c_k(i_1,\ldots,i_k),i_{k+1})$$

Folgerung 6.21

Es gilt:

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

Abzählbarkeit

Definition 6.22

Eine Menge M heißt abzählbar genau dann, wenn M endlich ist oder wenn $|M| = |\mathbb{N}_0|$ gilt.

Ist eine Menge nicht abzählbar, denn nennen wir sie überabzählbar.

Folgerung 6.23

(i) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

(ii) *Jede Obermenge einer nicht abzählbaren Menge ist nicht abzählbar.*

Beispiele für abzählbare Mengen

Beispiel 6.24

(i) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

(ii) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(iii) $\mathbb{N}^k$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ abzählbar.

(iv) Sei X eine endliche Menge. Dann ist die Menge der Funktionen $f : X \to X$ endlich und damit abzählbar.

Wie viele solche Funktionen gibt es? $|X|^{|X|}$

(v) Ist auch die Menge $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ abzählbar?

Diagonalisierung

Satz 6.25

Die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *der Funktionen* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ist überabzählbar.*

Beweis.

Annahme: Die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist abzählbar.

- Also gibt es eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$, die $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ abzählt.
- Sei $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ die durch g festgelegte Abzählung von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- Jetzt betrachten wir folgende Matrix:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots & j & \cdots \\
\hline
\phi_1 & \phi_1(1) & \phi_1(2) & \phi_1(3) & \cdots & \phi_1(j) & \cdots \\
\phi_2 & \phi_2(1) & \phi_2(2) & \phi_2(3) & \cdots & \phi_2(j) & \cdots \\
\phi_3 & \phi_3(1) & \phi_3(2) & \phi_3(3) & \cdots & \phi_3(j) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\phi_i & \phi_i(1) & \phi_i(2) & \phi_i(3) & \cdots & \phi_i(j) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Fortsetzung Beweis.

- Wir definieren mithilfe der Diagonalen dieser Matrix die Funktion $\phi_D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt:

$$\phi_D(k) = \phi_k(k) + 1$$

- Jetzt muss $\phi_D \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ gelten.
- Also existiert ein s mit $\phi_D = \phi_s$.
- Daraus folgt:

$$\phi_s(s) = \phi_D(s) = \phi_s(s) + 1$$

  Widerspruch!

Das Beweisprinzip, welches wir hier verwendet haben, heißt Diagonalisierung.

Konsequenz: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

- Schon die Menge $\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ der Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1,\ldots,9\}$$

ist überabzählbar.

- Ein Beweis hierfür erfolgt analog zum Beweis von Satz 6.25 mit

$$\phi_D(k) = (\phi_k(k) + 1) \bmod 10$$

- Analog beweist man auch, dass die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ der Funktionen

$$f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$$

überabzählbar ist.

- Die Menge $\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ entspricht (bijektiv) aber der Menge $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$.

- Begründung: Jede Zahl $x \in [0, 1]$ können wir als

$$x = 0, z_1 z_2 \ldots$$

  mit einer unendlichen Ziffernfolge $z_1, z_2, \ldots$ betrachten.
- Beachten Sie dabei: $0,999\ldots = 1$.
- Eine Ziffernfolge entspricht somit eineindeutig einer Abbildung $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$.
- Da die Menge $\{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist, muss somit auch die Menge $[0, 1]$ überabzählbar sein und
- damit ist auch $\mathbb{R}$ überabzählbar (siehe Folgerung 6.23).

Folgerung 6.26

$\mathbb{R}$ *ist mächtiger als* $\mathbb{N}$.

Abschlusseigenschaften abzählbarer Mengen

Satz 6.27

(i) *Es seien A und B abzählbare Mengen, dann sind auch $A \cap B$, $A \setminus B$ und $A \cup B$ abzählbar.*

(ii) *Es sei I eine unendliche, abzählbare Indexmenge und die Mengen $A_i, i \in I$ seien alle abzählbar. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar.*

Beweis.

(i) Die Abzählbarkeit von $A \cap B$ und $A \setminus B$ folgt aus 6.23.

Da A, B abzählbar sind, existieren bijektive Funktionen $f : A \to \mathbb{N}$ und $g : B \to \mathbb{N}$. Damit ist die Funktion $h : A \cup B \to \mathbb{Z}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ -g(x) & \text{falls } x \in B \setminus A \end{cases}$$

injektiv, also $|A \cup B| \leq |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Fortsetzung Beweis.

(ii)
- O.B.d.A. seien die Mengen A_i paarweise disjunkt.
- Da die Indexmenge I abzählbar ist, können wir auch $\mathbb{N}$ als Indexmenge nehmen.
- Wir betrachten also $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
- Jede Menge A_i ist abzählbar, also $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$.
- Für eine Abzählung nutzen wir die Matrix wie bei der Cantorschen Tupelfunktion:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
1 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots & q & \ldots \\
\hline
A_1 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & & \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \\
A_2 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & & & & \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & & & & & \\
A_3 & a_{31} & & a_{32} & & & & & & & \\
 & & \swarrow & & & & & & & & \\
A_4 & a_{41} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Damit liefert uns die Cantorsche Paarungsfunktion eine Abzählung der a_{ij}.

Zusammenfassung

- Wichtige kombinatorische Elemente: Fakultät, Permutation, Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz
- Prinzipien zum Abzählen endlicher Mengen: Schubfachprinzip, Bijektionsprinzip, Prinzip des doppelten Abzählens
- Gleichmächtige Mengen sind bijektiv aufeinander abbildbar.
- Unendliche abzählbare Mengen sind gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.
- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
- Abzählbare Mengen sind abgeschlossen bzgl. $\cap$, $\cup$ und $\setminus$.