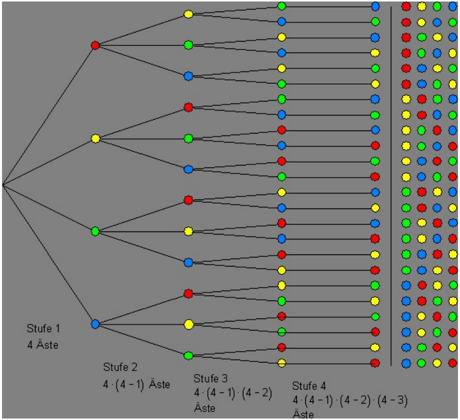
Kapitel 6

Elementare Kombinatorik und Abzählbarkeit



Inhalt

Multiplikationssymbol

- Zur Notation eines Produktes mehrerer Faktoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verwenden wir das Symbol $\prod$:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

- Der Multiplikationsindex kann dabei auch zwischen $u, o \in \mathbb{N}_0$ laufen:

$$x_u \cdot x_{u+1} \cdot \ldots \cdot x_o = \prod_{i=u}^{o} x_i$$

- Für den Fall $u > o$ legen wir fest:

$$\prod_{i=u}^{o} x_i = 1$$

Fakultät

Definition 6.1

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt das Produkt

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Fakultät von n. Wir setzen $0! = 1$.

Beispiel 6.2

$$\begin{aligned}
5! &= 120 \\
10! &= 3628800 \\
20! &= 2432902008176640000 \\
30! &= 265252859812191058636308480000000
\end{aligned}$$

Permutation

Definition 6.3

Es sei $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine n-elementige Menge. Dann heißt eine bijektive Abbildung

$$\sigma : X \to X$$

Permutation.

Satz 6.4

Für eine n-elementige Menge X gibt es $n!$ verschiedene Permutationen.

- Für die mathematische Betrachtung von Permutationen beschränkt man sich üblicherweise auf $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Für uns ist eine Permutation also stets eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Schreibweise von Permutationen

Eine Permutation $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ stellt man üblicherweise in Form einer zweizeiligen Matrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

oder verkürzt in Tupelform

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

dar.

Beispiel 6.5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Gruppe

Definition 6.6

S_n bezeichne die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Bemerkung:

- $(S_n, \circ)$ bildet mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe.
- S_n wird auch als symmetrische Gruppe bezeichnet.
- Eine Permutationsgruppe ist eine Untergruppe von S_n.
- Nach dem sogenannten Satz von Cayley ist jede endliche Gruppe isomorph zu einer Permutationsgruppe (siehe Algebra).

Binomialkoeffizient

Definition 6.7

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt der Ausdruck

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient von n über k.

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Satz 6.8

Es gilt:

(i)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(ii)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis.

Übungsaufgabe.

Anzahl k-elementiger Teilmengen

Satz 6.9

Es sei M eine n-elementige Menge.
Dann gibt es $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von M, also:

$$|\{A \in \mathcal{P}(M) \mid |A| = k\}| = \binom{n}{k}$$

Beweis.

Vollständige Induktion über n. Induktionsanfang bei $n = 0$ für die leere Menge.

Binomischer Lehrsatz

Satz 6.10

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Beweis.

Vollständige Induktion, Übungsaufgabe.
Hinweis: Indexverschiebung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$$

Schubfachprinzip

Satz 6.11

Es seien n Elemente auf m (paarweise disjunkte) Mengen verteilt und es gelte $n > m$.
Dann gibt es mindestens eine Menge, die mindestens zwei Elemente enthält.

Beweis.

Wenn jede der m Mengen höchstens ein Element enthalten würde, dann gäbe es insgesamt höchstens m Elemente. Widerspruch zu $n > m$.

Andere Bezeichnungen für das Schubfachprinzip: Taubenschlagprinzip, engl.: pigeonhole principle

Anwendungen des Schubfachprinzips

Beispiel 6.12

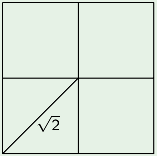
(i) Prof. B. hat in seiner Sockenkiste weiße, schwarze und grüne Socken.

Wenn er vier Socken aus der Kiste nimmt, hat er mindestens zwei Socken mit der gleichen Farbe.

$n = 4$ Elemente verteilt auf $m = 3$ Mengen.

(ii) Unter je fünf Punkten, die in einem Quadrat der Seitenlänge 2 liegen, gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{2}$ haben.

- Wir unterteilen das Quadrat durch halbieren der Seitenlänge in vier Unterquadrate mit Seitenlänge 1.
- $n = 5$ Punkte verteilen sich auf $m = 4$ Unterquadrate.
- Dann muss mindestens ein Unterquadrat zwei Punkte enthalten.



Bijektionsprinzip

Satz 6.13

Seien A und B endliche Mengen.
Dann gilt $|A| = |B|$ genau dann, wenn eine bijektive Funktion $f : A \to B$ existiert.

Beweis.

„$\Rightarrow$“: Es gelte $|A| = |B| =: n$.
Sei $A = \{a_n, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann ist $f : A \to B$ definiert durch

$$f(a_i) = b_i$$

eine bijektive Abbildung.

Fortsetzung Beweis.

„$\Leftarrow$“: Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung.
Annahme: $|A| \neq |B|$. Dann muss entweder $|B| < |A|$ oder $|B| > |A|$ gelten.

1. Sei $|B| < |A|$.
   Mit dem Schubfachprinzip folgt, dass es a_i und a_j mit $i \neq j$ und $f(a_i) = f(a_j)$ geben muss.
   Widerspruch zur Injektivität von f.
2. Sei $|B| > |A|$.
   Da f bijektiv ist, muss auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv sein (siehe Folgerung 5.44).
   Mit dem Schubfachprinzip folgt, dass es b_i und b_j mit $i \neq j$ und $f^{-1}(b_i) = f^{-1}(b_j)$ geben muss.
   Widerspruch zur Injektivität von f^{-1}.

Also ist die Annahme falsch. Damit folgt $|A| = |B|$.

Anwendungen des Bijektionsprinzips

Aus Satz 5.4 wissen wir, dass eine n-elementige Menge 2^n verschiedene Teilmengen hat. Hier ein anderer Beweis mit dem Bijektionsprinzip.

Beispiel 6.14

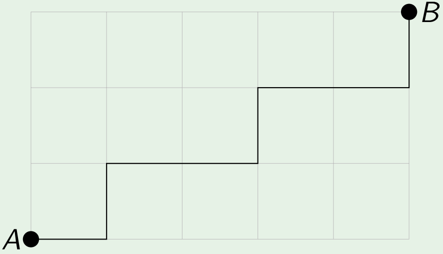
- Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Sei $\mathcal{S} = \{s_1 \cdots s_n | s_i \in \{0, 1\}\}$ die Menge der Bitstrings der Länge n.
- Wir konstruieren eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{S}$ wie folgt: Für $B \subseteq A$ ist $f(B) = s_1 \cdots s_n$ mit

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_i \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Es gibt 2^n verschiedene Bitstrings der Länge n.
- Mit dem Bijektionsprinzip folgt, dass es auch 2^n verschiedene Teilmengen einer n-elementigen Menge geben muss.

Beispiel 6.15

- Gegeben sei ein Gitter der Breite m und der Höhe n.
- Wie viele verschiedene Wege gibt es von links unten (A) nach rechts oben (B), wenn man in einem Schritt nur nach rechts und oben gehen darf?



- Beispiel für $m = 5$ und $n = 3$:
- Lösung: $\binom{n+m}{n}$
- Beweis durch Konstruktion einer Bijektion zwischen den verschiedenen Wegen und den n-elementigen Teilmengen einer $n + m$-elementigen Menge.

Prinzip des doppelten Abzählens

- Wir stellen eine Relation $R \subseteq A \times B$ mithilfe einer boolschen Matrix dar (siehe Folie 138).
- Dann bilden wir die Summe der Zeilensummen und die Summe der Spaltensummen.
- Die beiden Summen müssen identisch sein.
- Durch Gleichsetzung der Summen erhalten wir eine Formel, die wir zur Berechnung einer fraglichen Anzahl nutzen können.

Beispiel 6.16

Dekan H. setzt fest, dass jeder Student genau 4 der 7 angebotenen Vorlesungen hören muss. Die Dozenten melden 45, 36, 30, 20, 25, 12 und 16 Zuhörer. Wie viele Studenten gibt es?

- Sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ die Menge der Studenten.
- Sei $V = \{v_1, \ldots, v_7\}$ die Menge der Vorlesungen.
- Es gelte $(s, v) \in R \subseteq S \times V$ genau dann, wenn Student s Vorlesung v hört.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Σ
s_1	0	1	1	1	0	1	0	4
s_2	1	1	0	1	1	0	0	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s_n	0	1	0	1	1	0	1	4
Σ	45	36	30	20	25	12	16	$= 4n$

- Also $n = \dfrac{\sum_{v \in V} \text{Zuhörer in } v}{4}$, hier $n = 46$.