Vollständige Induktion

- Angenommen, wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
- Anders ausgedrückt: Es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

- Hierzu können wir die Technik der vollständigen Induktion verwenden.
  - Wir zeigen, dass $P(1)$ gilt.
  - Wir zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Induktionsbeweis

Ein Beweis mit vollständiger Induktion verläuft dementsprechend nach folgendem Schema:

Kurzschreibweise (häufig benutzt)

- Induktionsanfang
  Zeige, dass $P(1)$ gilt.
  $n = 1$
- Induktionsschritt
  Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$
  $n \rightarrow n+1$
- Die Aussage $P(n)$ heißt dabei Induktionsvoraussetzung oder Ind. Ann., IV
  Induktionsannahme.
  Ann: Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$
- Die Aussage $P(n+1)$ ist die Induktionsbehauptung.

Ind. Beh.: Aussage gilt auch für $n+1$

Warum funktioniert vollständige Induktion?

Wir haben:

- $P(1)$
- $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Angewendet auf den Induktionsanfang $P(1)$ und den Induktionsschritt für $n = 1$ erhalten wir mithilfe des Modus Ponens:

$$(P(1) \wedge (P(1) \Rightarrow P(2))) \Rightarrow P(2)$$

Jetzt verwenden wir $P(2)$ und den Induktionsschritt für $n = 2$:

$$(P(2) \wedge (P(2) \Rightarrow P(3))) \Rightarrow P(3)$$

Dies können wir immer weiter fortsetzen.

Modus Ponens:

$$\frac{\alpha \ , \ \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

$\alpha \mathrel{\hat{=}} P(n)$

$\alpha \rightarrow \beta \mathrel{\hat{=}} P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Summationssymbol

- Zur Notation der Summe von mehreren Summanden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verwenden wir das Summationssymbol $\sum$:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Der Summationsindex kann dabei auch zwischen $u, o \in \mathbb{N}_0$ laufen:

$$x_u + x_{u+1} + \ldots + x_o = \sum_{i=u}^{o} x_i$$

- u heißt untere und o obere Index- oder Summationsgrenze.
- Für den Fall $u > o$ legen wir fest:

$$\sum_{i=u}^{o} x_i = 0$$

Beispiel 4.5

Donnerstag, 1. Dezember 2016

Beispiel 4.5

Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist diese Gleichung entweder wahr oder falsch. Also stellt diese Gleichung ein Prädikat $P(n)$ dar.

Wir wollen zeigen, dass die Gleichung (und damit das Prädikat $P(n)$) für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

- Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Also gilt die Gleichung für $n = 1$, d. h. $P(1)$ ist wahr.

Fortsetzung Beispiel.

(ii) Induktionsschritt $n \to n+1$
Gemäß Induktionsvoraussetzung (I.V.) dürfen wir $P(n)$ als wahr annehmen, d. h. die Gleichung gilt für n.
Wir müssen nun zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt, also dass auch $P(n+1)$ wahr ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \underbrace{(n+1)}_{i=n+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{i=1..n} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

IV

Damit haben wir nun bewiesen, dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ind. Ann: (Vorauss.)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Ind. Beh. (Beh.)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

Verschiebung des Induktionsanfangs

- Was tun, wenn ein Prädikat nicht ab $n = 1$ sondern erst ab $n = k$ wahr ist? $k > 1$
- Wir definieren ein neues Prädikat Q mit

$$Q(n) :\Leftrightarrow P(n + k - 1)$$

$Q(1) = P(k)$
$Q(2) = P(k+1)$
$\vdots \qquad \vdots$

- Somit gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_k : P(n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : Q(n)$$

- Praktisch genügt es, einfach den Induktionsanfang auf k zu legen.
- Dies geht natürlich auch in die andere Richtung. Um

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : R(n)$$

zu zeigen, legen wir den Induktionsanfang auf $n = 0$.

Aussage Q für alle natürlichen Zahlen n
$\Leftrightarrow$
Aussage P für alle nat. Zahlen $\geq k$

auch für $k \in \mathbb{Z}$ möglich

Beispiel 4.6

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Fortsetzung Beispiel.

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$7^n - 1 \text{ ist ein Vielfaches von } 6$$

(v) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt:

$$n! > 2^n$$

Beweise an der Tafel. ✎

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i ist nicht die Ind. Variable, sondern n

Ind. Anf: $n = 0$

$$\sum_{i=1}^{0} i^2 = 0 \quad \text{da untere Grenze > obere Grenze}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n=0}{=} \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0 \quad \checkmark$$

Schritt $n \to n+1$:

Ind Ann: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Ind. Beh: $\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} i^2} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$

Bew: $\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} i^2} = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2}}_{i=1\ldots n} + \underbrace{(n+1)^2}_{i=n+1}$

$$\underset{(\text{Ind.Ann})}{=} \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \quad \checkmark$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}}$$

Prinzip der vollst. Ind.

ab hier: "nur" noch rechnen!

Bsp 4.6 (iii)

Donnerstag, 1. Dezember 2016

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Ind. Anf. $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{x^1 - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Schluss $n \to n+1$:

Ind. Ann.: $\boxed{\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}$

Ind. Beh.: $\boxed{\sum_{i=0}^{n+1} x^i} = \boxed{\frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}}$

Beweis:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n+1} x^i} = \underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{n} x^i}}_{i=0\ldots n} + \underbrace{x^{n+1}}_{i=n+1}$$

$$\overset{(\text{Ind. Ann.})}{=} \boxed{\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}} + x^{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{(x-1)\, x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1}$$

$$= \boxed{\frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}}$$

Bsp 4.6 (v)

Donnerstag, 1. Dezember 2016

(v) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt:

$$n! > 2^n$$

Ind. Anf: $n = 4$:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 > 16 = 2^4$$

Schluss $n \to n+1$:

Ind. Ann: $n! > 2^n$

Ind. Beh: $(n+1)! > 2^{n+1}$

Beweis: $(n+1)! = n! \, (n+1)$

$\underset{\text{(Ind. Ann.)}}{>} 2^n \underbrace{(n+1)}_{>2}$

und da $n+1 > 0$

(da $n+1 \geq 4$
> 2)

$> 2^n \cdot 2$

$= 2^{n+1}$

$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}_{n!} \cdot (n+1)$

$n! > 2^n$

$\Rightarrow n!(n+1) > 2^n(n+1)$?

$a > b$
$\overset{?}{\Rightarrow} a \cdot c > b \cdot c$
$\Big\}$ stimmt für $c > 0$

Fibonacci-Zahlen

Definition 4.7

Die Fibonacci-Zahlen F_n sind für $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$

Leonardo da Pisa

Auch Fibonacci genannt (1170–1240), war Rechenmeister in Pisa und gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Die Fibonacci-Zahlen gehen auf eine Übungsaufgabe von Fibonacci zur Vermehrung von Kaninchen zurück.

Formel von Moivre-Binet

Satz 4.8

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Beweis.

Mittels vollständiger Induktion, Übungsaufgabe.

- Der Beweis für die Korrektheit einer expliziten Formel ist i.d.R. viel einfacher als die Herleitung solch einer expliziten Formel.
- Im nächsten Semester lernen Sie einen ersten Ansatz zur Herleitung solch expliziter Formeln kennen.

bisher

$$\frac{P(n), \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)}{P(n+1)}$$

Anf: $n = n_0$

Schritt $n \to n+1$

hier 2-Term-Rekursion

$$\frac{P(n), P(n-1), \quad P(n) \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n+1)}{P(n+1)}$$

Ind. Anf. für zwei Werte nötig, $n=0$, $n=1$

Ind. Ann: $P(n) \wedge P(n-1)$

Beh: $P(n+1)$

Strukturelle Induktion

- Wir können vollständige Induktion auch anwenden, um zu zeigen, dass eine Eigenschaft $P(x)$ für alle Elemente einer rekursiv definierten Menge M gilt.
- Der Induktionsanfang entspricht dabei dem Nachweis, dass $P(x)$ für alle explizit angegebenen Elemente von M gilt und
- der Induktionsschritt entspricht dem Nachweis, dass $P(y)$ gilt, wenn sich y aus den Elementen $x_1, \ldots, x_k \in M$ erzeugen lässt.
- Dabei dürfen wir $P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_k)$ als Induktionsvoraussetzung annehmen.

Rekursiv definierte Menge:

- Initialisierung: Elemente angeben, die zur Menge gehören
- Rekursion: Erzeugungsregeln, die angeben, wie aus bestehenden Elementen neue Elemente der Menge generiert werden können.

Beispiel 4.9

Wir betrachten die Menge M, die definiert ist durch:

2 Erzeugungsregeln

(i) $7 \in M$

(ii) Gilt $x, y \in M$, dann gilt auch $3x \in M$ und $x + y \in M$.

Wir wollen zeigen, dass alle Elemente von M durch 7 teilbar sind, also:

$$\forall x \in M : 7|x$$

Induktionsanfang: $7|7$ ist wahr. Aussage gilt für $x = 7$

Induktionsschritt: Es gelte $x, y \in M$. Mit Induktionsvoraussetzung folgt $7|x$ und $7|y$, d. h.

$$\exists a \in \mathbb{N} : 7a = x$$
$$\exists b \in \mathbb{N} : 7b = y$$

Ind. Ann.: x und y sind durch 7 teilbar

Aus der ersten Aussage folgt $7 \cdot 3a = 3x$, also gilt auch $7|3x$.

Ind. Schritt für 1. Erzeugungsregel
wenn x durch 7 teilbar, dann auch $3 \cdot x$

Fortsetzung Beispiel.

Wenn wir die Gleichungen der beiden Aussagen addieren, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} 7a + 7b &= x + y \\ \Rightarrow \quad 7(a+b) &= x + y \end{aligned}\right\}$$

Induktionsschritt für 2. Erzeugungsregel: wenn x und y durch 7 teilbar, dann auch die Summe

Also gilt auch $7|(x+y)$.

Bemerkungen:

- Die Induktion geht hier über die Anzahl der Ableitungsschritte, um ein Element x herzuleiten.
- Wir beweisen praktisch, dass die Aussage

  $Q(n) \quad :\Leftrightarrow \quad$ Eigenschaft P gilt für alle Elemente, die mit n Schritten abgeleitet werden können

  für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Strukturelle Induktion für formale Sprachen

- Die wichtigsten Mengen in der Informatik, die rekursiv definiert sind, sind formale Sprachen.
- Strukturelle Induktion erlaubt es uns nun, Spracheigenschaften induktiv entlang der Syntaxregeln nachzuweisen.

auch für andere rekursiv definierte Strukturen anwendbar,
z.B. verkettete Listen, Bäume
($\rightsquigarrow$ Alg. und Datenstrukturen, Graphentheorie ...)

Beispiel 4.10

Wir wollen zeigen:

In jeder aussagenlogischen Formel ist die Anzahl der öffnenden Klammern gleich der Anzahl der schließenden Klammern.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Notation ein:

Für ein Zeichen c und eine aussagenlogische Formel α bezeichnet α_c die Anzahl der Vorkommen von c in α.

Die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln ist rekursiv definiert (siehe Folie 43).

Induktionsanfang: Atomare Formeln sind die aussagenlogischen Konstanten 0 und 1 und die Aussagenvariablen. Diese Formeln enthalten keine Klammern, also

Zahl 0

log. Konst. 0

Anzahl der (-Klammern im Ausdruck 0

$$0_(= 0 = 0_)$$
$$1_(= 0 = 1_)$$
$$x_(= 0 = x_) \text{ für alle } x \in V$$

$\alpha = 0$: keine öffnenden, keine schließenden Klammern, also gleich viele, nämlich 0

$\alpha = 1$: "

$\alpha = x$: "

Folie 43: 0, 1, p, q, ... sind aussagenlog. Formeln

Wenn α, β auss.-log. Formeln sind, dann auch

$(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $\neg\alpha$

Fortsetzung Beispiel.

Somit gilt die zu beweisende Aussage für alle atomaren Formeln.
Induktionsschritt: Für gegebene Formeln $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ können gemäß Definition von $\mathcal{A}$ die Formeln

$$\boxed{\gamma = (\alpha \wedge \beta)}, \delta = (\alpha \vee \beta), \epsilon = \neg\alpha$$

gebildet werden.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\alpha_(= \alpha_)$ und $\beta_(= \beta_)$.
Wir erhalten

wenn die Aussage für α und β gilt, dann auch für γ

$$\gamma_(= \alpha_(+ \beta_(+ 1 = \alpha_) + \beta_) + 1 = \gamma_)$$
$$\delta_(= \alpha_(+ \beta_(+ 1 = \alpha_) + \beta_) + 1 = \delta_)$$
$$\epsilon_(= \alpha_(= \alpha_) = \epsilon_)$$

Damit ist der Induktionsschritt für alle Fälle bewiesen.

Einschub: Formale Sprachen

Donnerstag, 1. Dezember 2016 09:29

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge von Symbolen.

$$\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots\ a_n\}$$

Definition der Zeichen

- Ein Wort (über dem Alphabet Σ) ist eine endliche Folge von Symbolen aus Σ.

$$w = w_1 w_2 w_3 \ldots w_m \text{ mit } w_i \in \Sigma$$

Aneinanderhängen von Zeichen (Konkatenation) ⇝ liefert Wörter

Beispiele

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ $\quad w = acab \quad u = abac \quad v = cca$
- $\Sigma = \{0, 1\}$ $\quad w = 1 \quad u = 1001 \quad v = 001$
- $\Sigma = \{0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ 9\ ,\ +\ ,\ -\ ,\ \cdot\ ,\ :\ ,\ (\ ,\ )\ \}$
  $w = 1 + 2 \quad u = 23 \cdot (7 + 4) \quad \boxed{v = +(-}$ ist ein zulässiges Wort über Σ

Wörter u und v kann man verketten (konkatenieren):

$$u \circ v = uv$$

vgl. String-Konkatenation in Java

Beispiel:

Für $u = abac, v = cca$, ist $u \circ v = abaccca$

Die Menge aller Wörter über einem Alphabet Σ (einschließlich des leeren Wortes) bezeichnet man mit Σ^*.

Eine (formale) Sprache L (über Σ) ist eine beliebige Teilmenge von Σ^* :

$$L \subseteq \Sigma^*$$

formale Sprachen sind Mengen von Wörtern

Weiteres Beispiel

Donnerstag, 1. Dezember 2016

Ähnlich Klausuraufgabe vom vergangenen Sommer:

Die formale Sprache S sei über dem Alphabet {0, 1} wie folgt definiert:

i) 0 ist in S und 010 ist in S
ii) Wenn x und y in S sind, dann auch x101y ("Konkatenation" von Wörtern)
iii) S enthält genau die Elemente, die durch i) und ii) definiert sind.

keine Zeichen, sondern Platzhalter für Wörter aus S, die selber nur aus 0'en und 1'en bestehen

Zeigen Sie: Jedes Wort aus S enthält mehr 0'en als 1'en.

Beweis strukturelle Ind:

Ind. Anf: z.z g: 0 hat mehr 0'en als 1'en ✓

$0_0 = 1 \qquad 0_1 = 0$

und 010 hat mehr 0'en als 1'en

$010_0 = 2 \qquad 010_1 = 1$ ✓

Beispiele für Wörter aus S:

0, 010

0101 010

x y

0 1 01 0

010 1010

⋮

Ind. Schritt: seien $x, y \in S$

Ind. Ann: $x_0 > x_1, \quad y_0 > y_1$

Ind. Beh: x 101 y hat mehr 0'en als 1'en

also $(x101y)_0 > (x101y)_1$

Beweis: $(x101y)_0 = x_0 + 1 + y_0$

$> \qquad > \qquad > \; ?$

$(x101y)_1 = x_1 + 2 + y_1$

Ind. Ann: $x_0 > x_1 \iff x_0 \geq x_1 + 1$

$y_0 > y_1 \iff y_0 \geq y_1 + 1$

dann: $x_0 + 1 + y_0 \geq x_1 + 1 + 1 + y_1 + 1 = x_1 + y_1 + 3 > x_1 + 2 + y_1$

Zusammenfassung

- Beweisverfahren: direkter Beweis, indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Ringschluss
- Vollständige Induktion um zu zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
- vollständige Induktion $=$ Induktionsanfang plus Induktionsschritt
- Induktionsanfang kann verschoben werden, um die Gültigkeit von $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_k$ zu zeigen.
- Strukturelle Induktion: Vollständige Induktion für formale Sprachen