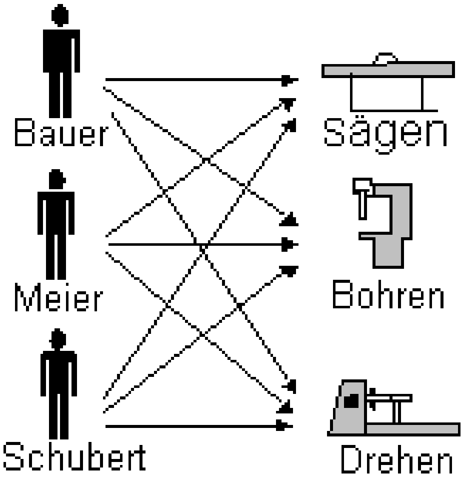
Kapitel 1

Totale Unimodularität



Inhalt

1. Totale Unimodularität
   - Wiederholung: Transport- und Zuordnungsproblem
   - Total unimodulare Matrizen
   - Inzidenzmatrix
   - Optimierungsprobleme auf Graphen

Transportproblem

Definition 1.1

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

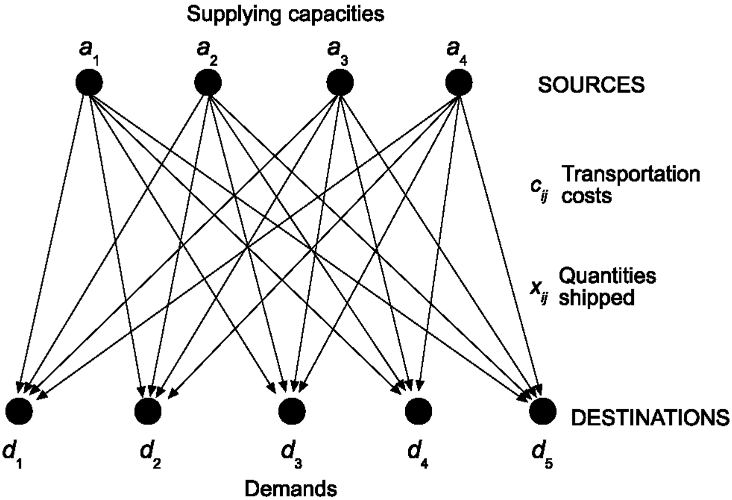
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$x_{ij} \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

heißt Transportproblem.


Supplying capacities
a_1
a_2
a_3
a_4
SOURCES
c_{ij} Transportation costs
x_{ij} Quantities shipped
DESTINATIONS
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
Demands

Bemerkungen zum Transportproblem

Wir setzen ein geschlossenes Transportproblem voraus: $a_i > 0, b_j > 0$ und $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, also Gesamtangebot = Gesamtnachfrage.

Für den Fall $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ führen wir ein zusätzliches Warenhaus mit $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ und $c_{i,n+1} = 0$ ein.

Für den Fall $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ führen wir eine zusätzliche Produktionsstätte mit $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ ein.

Die $c_{m+1,j}$ modellieren dann die Kosten pro ME für das mangelnde Angebot in Warenhaus j.

Anzahl Variablen: $m \cdot n$

Beispielproblem

Beispiel 1.2

Wir gehen von folgenden Kosten, Angebot und Nachfrage aus:

	B_1	B_2	B_3	
A_1	9	1	3	50
A_2	4	5	8	70
	40	40	40	

Fortsetzung Beispiel.

Damit lautet das zugehörige Transportproblem

$$\min 9x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = & 50 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 70 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = & 40 \\
 & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = & 40 \\
 & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = & 40
\end{array}$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0.$$

Lösungsalgorithmen

- Simplexalgorithmus
  Anzahl Basisvariablen: $n + m - 1$
- Stepping-Stone-Methode
  Kombinatorische Entsprechung des Simplex-Algorithmus
- u-v-Methode
  Verbesserung der Stepping-Stone-Methode durch Dualitätseigenschaften

Zuordnungsproblem

Definition 1.3

Das Optimierungsproblem $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

sowie

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } j = 1, \ldots, n$$

heißt Zuordnungsproblem.

Ecken des Zuordnungsproblems

Definition 1.4

Ein Zuordnungsproblem mit den Vorzeichenbedingungen

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ für } i, j = 1, \ldots, n$$

statt $x_{ij} \in \{0, 1\}$ heißt relaxiertes Zuordnungproblem.

Beispiel 1.5

Wir betrachten ein relaxiertes Zuordnungproblem mit Kostenmatrix

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fortsetzung Beispiel.

Dann sind

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) \\
&= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\
\mathbf{y} &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \text{ und} \\
\mathbf{z} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1\right)
\end{aligned}
$$

optimale Lösungen.
Wegen

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$$

ist aber $\mathbf{z}$ keine Ecke und würde damit vom Simplexalgorithmus niemals als optimale Lösung ermittelt.

Transport- vs. Zuordnungsproblem

- Das relaxierte Zuordnungsproblem ist ein spezielles Transportproblem.
- $n = m$ und $a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_n = 1$
- Alle Lösungsalgorithmen für das Transportproblem können auch auf das relaxierte Zuordnungsproblem angewendet werden.

Ganzzahligkeit der Ecken beim Zuordnungsproblem

Satz 1.6

Für jedes relaxierte Zuordnungsproblem sind alle Ecken ganzzahlig.

Für ein relaxiertes Zuordnungsproblem der Größe $n \times n$ gilt also

$$\mathbf{x} \text{ ist Ecke } \Rightarrow \mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n \times n}.$$

Beweis.

Induktion über n.

$n = 1$: $x_{11} = 1$ ist die einzige zulässige und damit optimale Lösung.

$n - 1 \to n$: Es sei $\mathbf{x}$ Ecke eines relaxierten $n \times n$-Zuordnungsproblems.

Fall 1: Es existieren $1 \leq i, j \leq n$ mit $x_{ij} = 1$.

- Dann streiche aus dem Zuordnungsproblem Zeile i und Spalte j und aus $\mathbf{x}$ alle entsprechenden Komponenten.
- Der Restvektor von $\mathbf{x}$ muss dann eine Ecke des $(n-1) \times (n-1)$ Zuordnungsproblems sein, das nach I. V. nur ganzzahlige Ecken hat.

Fortsetzung Beweis.

Fall 2: Es existiert kein i, j mit $x_{ij} = 1$.

- Damit folgt $0 \leq x_{ij} < 1$ für alle i, j.
- Wegen $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ für alle i folgt: Für jedes i gibt es mindestens zwei Variablen $x_{ij} > 0$.
- Damit existieren mindestens $2n$ Variablen $x_{ij} > 0$.
- Widerspruch, denn eine Ecke $\mathbf{x}$ und damit eine zulässige Basislösung hat nur $2n - 1$ Basisvariablen.

Folgerung 1.7

Wir können Zuordnungsprobleme mit dem Simplexalgorithmus optimal lösen.

Konsequenz

Wir können Zuordnungsprobleme lösen, indem wir

- zum relaxierten Problem übergehen und
- das relaxierte Problem mit dem Simplexalgorithmus lösen.

Wir wollen nun untersuchen,

- für welche weiteren kombinatorischen Probleme solch ein Vorgehen möglich ist, bzw.
- welche Bedingungen hinreichend für ganzzahlige Ecken sind.

Unimodulare Matrizen

Definition 1.8

Eine ganzzahlige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ heißt unimodular, wenn

$$|\det(\mathbf{A})| = 1$$

gilt, d. h. $\det(\mathbf{A}) = 1$ oder $\det(\mathbf{A}) = -1$.

Beispiel 1.9

Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist unimodular.

Cramersche Regel

Für den Beweis des übernächsten Lemmas benötigen wir die sogenannte Cramersche-Regel.

Lemma 1.10

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine quadratische Matrix mit* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. *Für das LGS* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *sei*

$$\mathbf{A}_j := (\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^{j-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}^{j+1}, \ldots, \mathbf{a}^n),$$

also die Matrix, die entsteht, wenn in $\mathbf{A}$ *die* j*-te Spalte durch den Vektor* $\mathbf{b}$ *ersetzt wird.*

Dann gilt für die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ *des Gleichungssystems* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}.$$

Beispiel 1.11

Wir betrachten das LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= 6 + 0 - 12 + 6 + 6 - 0 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel.

$$\det(\mathbf{A}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 6 + 2 + 2 - 0 = 0$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 9 - 3 - 6 + 9 + 3 - 6 = 6$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -6 + 0 - 12 + 6 + 18 - 0 = 6$$

Daraus folgt

$$x_1 = \frac{0}{6} = 0, \quad x_2 = \frac{6}{6} = 1, \quad x_3 = \frac{6}{6} = 1.$$

Eigenschaft unimodular Matrizen

Lemma 1.12

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ *eine unimodulare Matrix und* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ *beliebig.*

Dann hat der Vektor

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

ausschließlich ganzzahlige Komponenten.

Beweis.

- $\tilde{\mathbf{b}}$ ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- Wir nutzen die Cramersche Regel: Es gilt

$$|\tilde{b}_j| = \frac{|\det(\mathbf{A}_j)|}{|\det(\mathbf{A})|} = |\det(\mathbf{A}_j)|,$$

  weil $|\det(\mathbf{A})| = 1$.
- Wegen $\mathbf{A}_j \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist die Determinante von $\mathbf{A}_j$ ganzzahlig.

Quadratische Untermatrizen

Definition 1.13

Für eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie

- Zeilenindizes $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ und
- Spaltenindizes $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$

heißt die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

quadratische Untermatrix von $\mathbf{A}$.

Totale unimodulare Matrix

Definition 1.14

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist total unimodular genau dann, wenn jede quadratische Untermatrix von $\mathbf{A}$ die Determinante $0, 1$ oder -1 hat.

- Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})$ total unimodular ist, dann sind alle Matrixelemente a_{ij} gleich $0, 1$ oder -1.
  ☞ notwendige Bedingung
- Die Umkehrung gilt natürlich nicht.
  ☞ Bedingung ist nicht hinreichend.

Beispiel einer total unimodularen Matrix

Beispiel 1.15

1. Die folgende Matrix ist total unimodular:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nicht total unimodular.

Totale Unimodularität und ganzzahlige Ecken

Satz 1.16

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *eine total unimodulare Matrix und* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ *sei ein ganzzahliger Vektor. Dann hat die Menge*

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

nur ganzzahlige Ecken.

Beweis.

O.B.d.A. gelte $r(\mathbf{A}) = m$.

- $\mathbf{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$ ist zulässige Basislösung (siehe Lineare Optimierung, Satz 2.44)

Fortsetzung Beweis.

- $\mathbf{x}$ ist zulässige Basislösung $\Leftrightarrow \exists j_1, \ldots, j_m$ mit:
  - die Spaltenvektoren $\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m}$ sind linear unabhängig,
  - die Komponenten $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ von $\mathbf{x}$ sind für $\mathbf{A}' = (\mathbf{a}^{j_1}, \ldots, \mathbf{a}^{j_m})$ (eindeutige) Lösung des LGS

$$\mathbf{A}' \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

  - $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Nach der Cramer-Regel gilt

$$x_{j_k} = \frac{\det(\mathbf{A}'_{j_k})}{\det(\mathbf{A}')}.$$

Fortsetzung Beweis.

Weil $\mathbf{A}$ total unimodular ist und die Spaltenvektoren linear unabhängig sind, folgt $\det(\mathbf{A}') = 1$ oder -1.

Weil $\mathbf{b}$ ganzzahlig ist, ist auch $\det(\mathbf{A}'_{j_k})$ ganzzahlig.

Damit sind die x_{j_k} ganzzahlig.

Folgerung 1.17

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular und $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

Dann haben auch die Mengen

- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *und*
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$

nur ganzzahlige Ecken.

Varianten total unimodularer Matrizen

Lemma 1.18

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *total unimodular. Dann gilt:*

1. *Jede Untermatrix von* $\mathbf{A}$ *ist total unimodular.*
2. $\mathbf{A}^T$, $-\mathbf{A}$ *und damit auch* $-\mathbf{A}^T$ *sind total unimodular.*
3. $\mathbf{A}$ *erweitert um einen Spalten- oder Zeileneinheitsvektor ist total unimodular.*

Beweis.

(1) und (2) sind offensichtlich.

(3): Entwicklung nach der Spalte- oder Zeile, die den Einheitsvektor enthält.

Charakterisierungen für total unimodulare Matrizen

Satz 1.19

Es sei $\mathbf{A} \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\mathbf{A}$ *ist total unimodular.*
2. *Für jeden Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ *hat das Polyeder* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *nur ganzzahlige Ecken.*
3. *Für alle Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ *und* $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$ *hat das Polyeder* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{a} \leq \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ *nur ganzzahlige Ecken.*
4. *Jede Spaltenmenge von* $\mathbf{A}$ *kann so in zwei Mengen aufgeteilt werden, dass die Differenz der Spaltensummen der Mengen einen Vektor ergibt, der nur aus den Komponenten* $-1, 0, 1$ *besteht.*
5. *Keine quadratische Untermatrix von* $\mathbf{A}$ *hat die Determinate* $+2$ *oder* -2.

Inzidenzmatrix für gerichtete Graphen

Definition 1.20

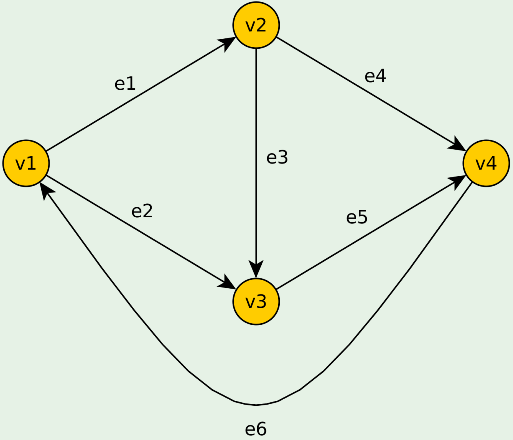
Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
Dann heißt die $m \times n$-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{wenn } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \text{ ist,} \\ 1 & \text{wenn } v_i \text{ Endknoten von } e_j \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix von G.

Beispiel 1.21

Die Matrix von Beispiel 1.15 ist Inzidenzmatrix des folgenden Graphen:



Inzidenzmatrix für ungerichtete Graphen

Definition 1.22

Es sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ und Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
Dann heißt die $m \times n$ Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \text{ inzident mit } e_j \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix von G.

Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (1)

Lemma 1.23

Es sei G ein gerichteter Graph mit m Knoten. Dann hat die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ von G einen Rang $r(\mathbf{A}) \leq m - 1$.

Beweis.

Die Summe der Zeilenvektoren ergibt den Nullvektor, da in jeder Spalte genau eine 1 und eine -1 existiert. $\square$

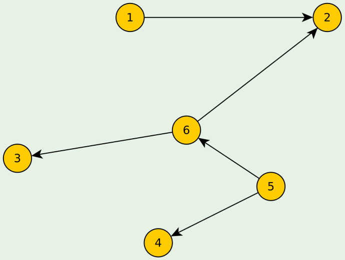
Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (2)

Definition 1.24

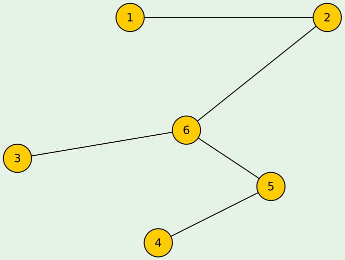
Ein gerichteter Graph G ist ein Wald bzw. ein Baum gdw. der G zugeordnete ungerichtete Graph G' (siehe Graphentheorie, Definition 1.44) ein Wald bzw. ein Baum ist.

Beispiel 1.25

gerichteter Graph G:



Der zugeordnete Graph G' ist ein Baum:



Lemma 1.26

Ein gerichteter Graph G ist genau dann ein Wald, wenn die Spalten der Inzidenzmatrix von G linear unabhängig sind.

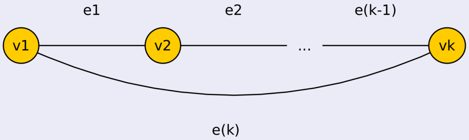
Beweis.

Wir zeigen: G enthält einen Kreis gdw. die Spalten der Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ linear abhängig sind.

Fortsetzung Beweis.

"$\Rightarrow$":

- Es sei $C =$



  ein Kreis in G' und $j_1, \ldots, j_k$ seien die zugehörigen Spaltenindizes der Inzidenzmatrix.
- Für $l = 1, \ldots, k$ setzen wir:

$$\alpha_l = \begin{cases} 1 & e_l \text{ hat in } G \text{ die Richtung } v_{l-1} \to v_l \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Damit gilt

$$\alpha_1 \mathbf{a}^{j_1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}^{j_k} = \mathbf{0}$$

  die Spaltenvektoren sind also linear abhängig.

Fortsetzung Beweis.

"$\Leftarrow$":

- Die Spalten von $\mathbf{A}$ seien linear abhängig.
- Dann existieren Spaltenindizes $j_1, \ldots, j_k$ und Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \neq 0$ mit

$$\alpha_1 \mathbf{a}^{j_1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}^{j_k} = \mathbf{0}$$

- Es sei E'' die Menge der Kanten zu den Spaltenindizes $j_1, \ldots, j_k$ und V'' sei die Menge der mit den Kanten aus E'' inzidenten Knoten.
- Wir betrachten jetzt den Graphen $G'' = (V'', E'')$. Weil alle $\alpha_j \neq 0$ muss es für jede Zeile i, in der nicht nur 0en auftreten, mindestens zwei Spalten geben, deren Linearkombination in der i-ten Zeile $= 0$ ist.
- Damit hat jeder Knoten in G'' mindestens den Grad 2 und G'' kann damit nicht kreisfrei sein.

Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (3)

Satz 1.27

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *die Inzidenzmatriz eines gerichteten Graphen* G.

Dann ist $\mathbf{A}$ *total unimodular.*

Beweis.

Vollständige Induktion über die Größe k einer quadratischen Untermatrix.

$k = 1$: Die Untermatrizen der Größe $k = 1$ sind die Matrixelemente selbst. Per Definition der Inzidenzmatrix sind sie gleich $0, 1$ oder -1.

Fortsetzung Beweis.

$k-1 \to k$: Es sei $\mathbf{A}'$ eine quadratische Untermatrix von $\mathbf{A}$.
Fall 1: $\mathbf{A}'$ hat in jeder Spalte zwei Elemente $\neq 0$.

Dann definieren die Zeilen und Spalten von $\mathbf{A}'$ (als Inzidenzmatrix betrachtet) einen gerichteten Graphen G' mit k Knoten und k Kanten.

Damit kann G' nicht kreisfrei sein. Nach Lemma 1.26 sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}'$ linear abhängig. Also folgt $\det(\mathbf{A}') = 0$.

Fall 2: $\mathbf{A}'$ enthält eine Spalte j mit höchstens einem Element $a'_{ij} \neq 0$. Zur Berechnung von $\det(\mathbf{A}')$ entwickeln wir nach Spalte j. Es folgt

$$\det(\mathbf{A}') = (-1)^{i+j} \cdot a'_{ij} \cdot \det(\mathbf{A}'_{ij})$$

Nach I.V. gilt $\det(\mathbf{A}'_{ij}) = 0, 1$ oder -1. Also gilt auch

$$\det(\mathbf{A}') = 0, 1 \text{ oder } -1.$$

Eigenschaften einer Inzidenzmatrix (4)

Satz 1.28

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *die Inzidenzmatrix eines (ungerichteten) bipartiten Graphen* G.

Dann ist $\mathbf{A}$ *total unimodular.*

Beweis.

Übungsaufgabe ✎

Maximalflussproblem

Aus der Graphentheorie kennen wir das Maximalflussproblem: Gegeben ist ein Flussnetzwerk bestehend aus

- einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$,
- einer Kapazitätsfunktion $c : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
- einer Quelle $s \in V$ und einer Senke $t \in V$ mit $s \neq t$.

Gesucht ist ein Fluss $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$0 \leq f(e) \leq c(e) \text{ für alle } e \in E$$

und

$$\sum_{(w,v)\in E} f(w, v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v, w) \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}$$

der den Flusswert $\Phi(f) = \sum_{(s,w)\in E} f(s, w) - \sum_{(w,s)\in E} f(w, s)$ maximiert. Ein Fluss f, der $\Phi(f)$ maximiert, ist ein Maximalfluss.

Maximalflussproblem als LP

Man führe für jede gerichtete Kante $(v, w) \in E$ eine Variable x_{vw} ein. Damit erhält man das LP

$$\max \sum_{(s,w) \in E} x_{sw} - \sum_{(w,s) \in E} x_{ws}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_{vw} \leq c(v, w) \text{ für alle } (v, w) \in E$$

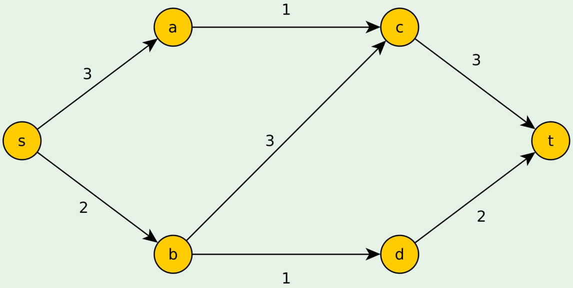
$$\sum_{(w,v) \in E} x_{wv} - \sum_{(v,w) \in E} x_{vw} = 0 \text{ für alle } v \in V \setminus \{s, t\}$$

sowie Vorzeichenbedingungen

$$x_{vw} \geq 0 \text{ für alle } (v, w) \in E$$

Beispiel 1.29

Gegeben sei das Flussnetzwerk



Das LP für das Maximalflussproblem lautet dann

$$\max x_{sa} + x_{sb}$$

Fortsetzung Beispiel.

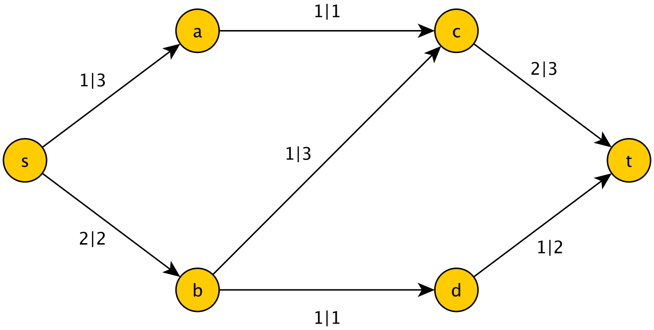
unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{rcl}
x_{sa} & \leq & 3 \\
x_{sb} & \leq & 2 \\
x_{ac} & \leq & 1 \\
x_{bc} & \leq & 3 \\
x_{bd} & \leq & 1 \\
x_{ct} & \leq & 3 \\
x_{dt} & \leq & 2 \\
x_{sa} - x_{ac} & = & 0 \\
x_{sb} - x_{bc} - x_{bd} & = & 0 \\
x_{ac} + x_{bc} - x_{ct} & = & 0 \\
x_{bd} - x_{dt} & = & 0
\end{array}
$$

und Vorzeichenbedingungen

$$x_{sa}, x_{sb}, x_{ac}, x_{bc}, x_{bd}, x_{ct}, x_{dt} \geq 0$$

Maximalfluss:



Koeffizientenmatrix in Normalform

Für jede Strukturvariable x_{vw} wird eine Schlupfvariable s_{vw} eingeführt.

$$\mathbf{F} = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

Satz 1.30

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{F}$ *eines Maximalflussproblems in Normalform ist total unimodular.*

Beweis.

Folgt induktiv aus Lemma 1.18 (3).

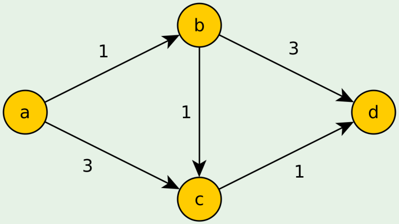
Folgerung 1.31

Für ganzzahlige Kapazitäten liefert der Simplexalgorithmus stets einen ganzzahligen Maximalfluss als optimale Lösung.

Kürzeste Wege

Beispiel 1.32

Für das Netzwerk



soll ein kürzester Weg von a nach d ermittelt werden.

Wir führen für jede gerichtete Kante $e = (v, w)$ eine Variable x_{vw} ein. Dann lautet das LP:

$$\min x_{ab} + 3x_{ac} + x_{bc} + 3x_{bd} + x_{cd}$$

Fortsetzung Beispiel.

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_{ab} - x_{bc} - x_{bd} &= 0 \\ x_{ac} + x_{bc} - x_{cd} &= 0 \\ -x_{ab} - x_{ac} &= -1 \\ x_{bd} + x_{cd} &= 1 \end{aligned}$$

und

$$x_{ab}, x_{ac}, x_{bc}, x_{bd}, x_{cd} \in \{0, 1\}$$

bzw. für das relaxierte LP

$$0 \leq x_{ab}, x_{ac}, x_{bc}, x_{bd}, x_{cd} \leq 1$$

Lemma 1.33

Das relaxierte LP zur Ermittlung eines kürzesten Weges hat unabhängig von den Kantengewichten ausschließlich ganzzahlige Ecken.

Transport- und Zuordnungsproblem revisited

Die Matrix $\mathbf{A}'$ der Nebenbedingungen eines relaxierten Zuordnungsproblems entspricht der Inzidenzmatrix eines vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$.

Damit ist die Matrix $\mathbf{A}'$ total unimodular.

Für die Beschränkungen $x_{ij} \leq 1$ werden zusätzliche Schlupfvariablen benötigt.

Insgesamt entsteht eine totale unimodulare Matrix in der gleichen Form wie beim Maximalflussproblem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Damit haben wir einen anderen Beweis für Satz 1.6: Beim relaxierten Zuordnungsproblem sind alle Ecken ganzzahlig.

Beim Transportproblem entspricht die Koeffizientenmatrix direkt der Inzidenzmatrix eines vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,n}$.

Konsequenz: Wenn die a_i und b_j alle ganzzahlig sind, dann hat das Transportproblem nur ganzzahlige Ecken.

Zusammenfassung

- ganzzahlige Ecken beim Zuordnungsproblem
- totale Unimodularität der Koeffizientenmatrix als wesentlicher Teil einer hinreichende Bedingung für ganzzahlige Ecken
- Inzidenzmatrizen als Beispiele für total unimodulare Matrizen
- Maximalflussproblem und kürzeste Wege als Beispiele für graphentheoretische LPs mit ganzzahligen Ecken