Kombinatorische Optimierung

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (Cramersche Regel)

(a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mithilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(b) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & b_1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & tx_3 & = & b_3 \end{array}$$

Geben Sie ein $t \in \mathbb{Z}$ an, so dass dieses Gleichungssystem für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Lösung hat. Begründen Sie auch die Ganzzahligkeit!

Lösung:

(a) Wir haben

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -24 + 1 + 2 - 3 + 8 - 2 = -18,$$

$$\det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -60 - 2 + 12 + 6 + 20 - 12 = -36,$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 10 + 2 + 6 + 8 - 20 = 54,$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 1 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -24 - 6 + 20 - 30 - 48 - 2 = -90.$$

Damit erhalten wir als Lösung für das Gleichungssystem

$$x_1 = \frac{-36}{-18} = 2, \quad x_2 = \frac{54}{-18} = -3, \quad x_3 = \frac{-90}{-18} = 5.$$

(b) Es gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 12t + 0 + 0 - 0 - 3 - 10t = 2t - 3.$$

Nach Lemma 1.12 hat das Gleichungssystem stets eine ganzzahlige Lösung, wenn $\mathbf{A}$ unimodular ist, also wenn $\det(\mathbf{A}) = 2t - 3 \in \{1, -1\}$ gilt.

$$\begin{aligned} 2t - 3 \in \{1, -1\} \quad &\Leftrightarrow \quad 2t - 3 = 1 \vee 2t - 3 = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2t = 4 \vee 2t = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad t = 2 \vee t = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Totale Unimodularität)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen total unimodular sind und begründen Sie Ihre Antwort.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

- Wegen $a_{1,3} = 2 \notin \{-1, 0, 1\}$ ist $\mathbf{A}$ nicht total unimodular (vgl. Folie 35).

- Es gilt $b_{i,j} \in \{0, 1\}$ für alle $1 \leq i \leq m = 3$ und $1 \leq j \leq n = 5$. Damit ist die Bedingung der totalen Unimodularität für Untermatrizen der Größe 1 erfüllt.

  Es sei
  $$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
  eine Untermatrix der Größe 2. Aus $\mathbf{det}(\mathbf{B}_2) = ad - bc$ und $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ folgt $\det(\mathbf{B}_2) \in \{-1, 0, 1\}$.

  Weiterhin gilt
  $$\det(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 1 = 1.$$
  Also ist $(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^4)$ total unimodular und somit gemäß Lemma 1.18 (3) auch $\mathbf{B}$.

- Es gilt:
  $$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2.$$
  Also ist $\mathbf{C}$ nicht total unimodular.

- Wir berechnen $\det(\mathbf{D})$ durch Entwicklung nach der letzten Spalte.
  $$\det(\mathbf{D}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2.$$
  Hinweis: Für Dreiecksmatrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

  Also ist $\mathbf{D}$ nicht total unimodular.

- Die Einheitsmatrizen $\mathbf{E}$ sind total unimodular, also auch $-\mathbf{E}$ (Lemma 1.18 (2)) und damit auch $\mathbf{F}$, denn $\mathbf{F}$ ist eine Erweiterung von $-\mathbf{E}$ um Zeileneinheitsvektoren (Lemma 1.18 (3)).

Aufgabe 3 (Totale Unimodularität)

Es sei $\mathbf{A} \in \{0, 1, -1\}^{m\times n}$, Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{A}$ ist total unimodular $\iff \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}$ ist total unimodular.

Hinweis: Betrachten Sie eine quadratische Untermatrix $\mathbf{A}'$ der Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}$ und unterscheiden Sie die folgenden vier Fälle:

1. $\mathbf{A}'$ enthält nur Zeilen aus der oberen Hälfte.
2. $\mathbf{A}'$ enthält nur Zeilen aus der unteren Hälfte.
3. Es existiert ein i mit $1 \leq i \leq m$, so dass $\mathbf{A}'$ sowohl die i-te Zeile der oberen als auch die i-te Zeile der unteren Hälfte enthält.
4. $\mathbf{A}'$ enthält sowohl Zeilen aus der oberen als auch aus der unteren Hälfte, es existiert aber kein i wie unter 3.

(b) $\mathbf{A}$ ist total unimodular $\iff \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}$ ist total unimodular.

Hinweis: Diese Aussage können Sie leicht aus (a) folgern.

(c) Wenn $\mathbf{A}$ total unimodular ist, dann hat das Polyeder

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

für alle $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$ und alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ nur ganzzahlige Ecken.

Hinweis: Nutzen Sie (b) und Folgerung 1.17.

Bemerkung: Dies ist der Beweis von (1) $\Rightarrow$ (3) für Satz 1.19.

Lösung:

(a) "$\Leftarrow$": Folgt aus Lemma 1.18 (1).

"$\Rightarrow$": Es sei $\mathbf{A}'$ eine quadratische Untermatrix von $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}$. Wir machen eine Fallunterscheidung.

1. $\mathbf{A}'$ enthält nur Zeilen aus der oberen Hälfte.
   Dann ist $\mathbf{A}'$ eine Untermatrix von $\mathbf{A}$ und damit folgt, weil $\mathbf{A}$ nach Voraussetzung total unimodular ist, $\det(\mathbf{A}') \in \{-1, 0, 1\}$.
2. $\mathbf{A}'$ enthält nur Zeilen aus der unteren Hälfte.
   Dann ist $\mathbf{A}'$ eine Untermatrix von $-\mathbf{A}$. Nach Lemma 1.18 (2) ist aber $-\mathbf{A}$ ebenfalls total unimodular und somit folgt $\det(\mathbf{A}') \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Es existiert ein i, so dass $\mathbf{A}'$ sowohl die i-te Zeile der oberen als auch die i-te Zeile der unteren Hälfte enthält.
   Diese beiden Zeilen sind bis auf das Vorzeichen identisch und somit linear abhängig. Damit folgt $\det(\mathbf{A}') = 0$.

4. $\mathbf{A}'$ enthält sowohl Zeilen aus der oberen als auch aus der unteren Hälfte, es existiert aber kein i wie unter 3., d. h. jede Zeile von $\mathbf{A}$ tritt in $\mathbf{A}'$ egal ob mit positivem oder negativem Vorzeichen höchstens einmal auf.

   Abgesehen von Zeilenvertauschungen gilt dann

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix} \mathbf{A}''$$

   wobei $\mathbf{A}''$ eine Untermatrix von $\mathbf{A}$ ist. Zeilenvertauschungen entsprechen einer Matrix mit Determinante ± 1 (Permutationsmatrix).

   Also gilt $\det(\mathbf{A}') = \pm\det(\mathbf{A}'')$ und somit $\det(\mathbf{A}') \in \{-1, 0, 1\}$.

(b) "$\Leftarrow$": Folgt wiederum aus Lemma 1.18 (1).

"$\Rightarrow$": Wenn $\mathbf{A}$ total unimodular ist, dann ist nach Lemma 1.18 (3) auch $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}$ total unimodular und gemäß der Hilfsaussage dann auch $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}$. Durch Zeilenvertauschung erhalten wir $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}$.
Da Zeilenvertauschungen die totale Unimodularität nicht beeinflussen (siehe oben), ist damit diese Matrix total unimodular.

(c) Es gilt:

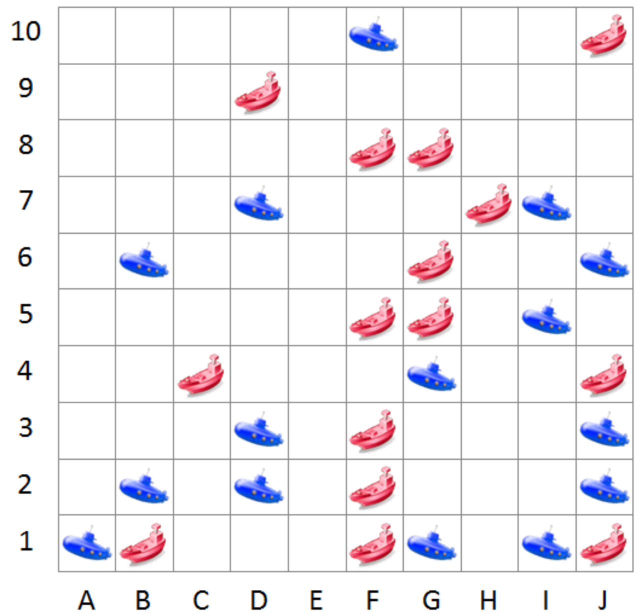
$$\begin{aligned} \mathbf{c} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \wedge \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}} \mathbf{x} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{a} \\ \mathbf{d} \\ -\mathbf{c} \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{f}} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{f} \end{aligned}$$

Wenn $\mathbf{A}$ total unimodular ist, dann ist nach (b) auch $\mathbf{B}$ total unimodular. Mit Folgerung 1.17 ergibt sich, dass das Polyeder

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{f}\}$$

für ganzzahlige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ nur ganzzahlige Ecken hat.

Aufgabe 4 (Zuordnungsproblem)



Obige Abbildung zeigt eine Karte mit 15 blauen, eigenen U-Booten und 15 roten, gegnerischen Schlachtschiffen. Ihr Ziel ist es, jedes U-Boot so zu bewegen, dass es das gleiche Feld wie ein Schlachtschiff besetzt. Wenn ein U-Boot das gleiche Feld wie ein Schlachtschiff besetzt, wird das Schlachtschiff zerstört. Jedes U-Boot kann nur ein Schlachtschiff zerstören. Schlachtschiffe können sich nicht bewegen.

Verwenden Sie den Satz des Pythagoras, um den Abstand zwischen den Zellen zu berechnen. Zum Beispiel beträgt die Entfernung zwischen Zellen A1 und B3 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,236$ Längeneinheiten.

Wie groß ist die Gesamtentfernung, die die U-Boote mindestens zurücklegen müssen, um alle Schlachtschiffe zu zerstören? Wie müssen sich die U-Boote hierfür bewegen?

Stellen Sie dieses Problem als Zuordnungsproblem dar und lösen Sie es mit dem GLPK.

Hinweis: Am einfachsten ist es, mit einem Programm das LP-Modell für das GLPK zu generieren.

Lösung: siehe Homepage, realisiert mit Gurobi