Kombinatorische Optimierung

Aufgabenblatt 1

Abgabe zu **zweit** vor der Vorlesung am 17. April 2024.

Sollpunktzahl: 14 Punkte

Aufgabe 1 (Cramersche Regel) — 2+3=5 Punkte

(a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mithilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(b) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & b_1 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ & & x_2 & + & tx_3 & = & b_3 \end{array}$$

Geben Sie ein $t \in \mathbb{Z}$ an, so dass dieses Gleichungssystem für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Lösung hat. Begründen Sie auch die Ganzzahligkeit!

Aufgabe 2 (Totale Unimodularität) — 1+2+2+2+2=9 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen total unimodular sind und begründen Sie Ihre Antwort.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Totale Unimodularität) — 4+1+3=8 Punkte

Es sei $\mathbf{A} \in \{0, 1, -1\}^{m \times n}$, Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{A}$ ist total unimodular $\iff$ $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}$ ist total unimodular.

Hinweis: Betrachten Sie eine quadratische Untermatrix $\mathbf{A}'$ der Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}$ und unterscheiden Sie die folgenden vier Fälle:

1. $\mathbf{A}'$ enthält nur Zeilen aus der oberen Hälfte.
2. $\mathbf{A}'$ enthält nur Zeilen aus der unteren Hälfte.
3. Es existiert ein i mit $1 \leq i \leq m$, so dass $\mathbf{A}'$ sowohl die i-te Zeile der oberen als auch die i-te Zeile der unteren Hälfte enthält.
4. $\mathbf{A}'$ enthält sowohl Zeilen aus der oberen als auch aus der unteren Hälfte, es existiert aber kein i wie unter 3.

(b) $\mathbf{A}$ ist total unimodular $\iff$ $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}$ ist total unimodular.

Hinweis: Diese Aussage können Sie leicht aus (a) folgern.

(c) Wenn $\mathbf{A}$ total unimodular ist, dann hat das Polyeder

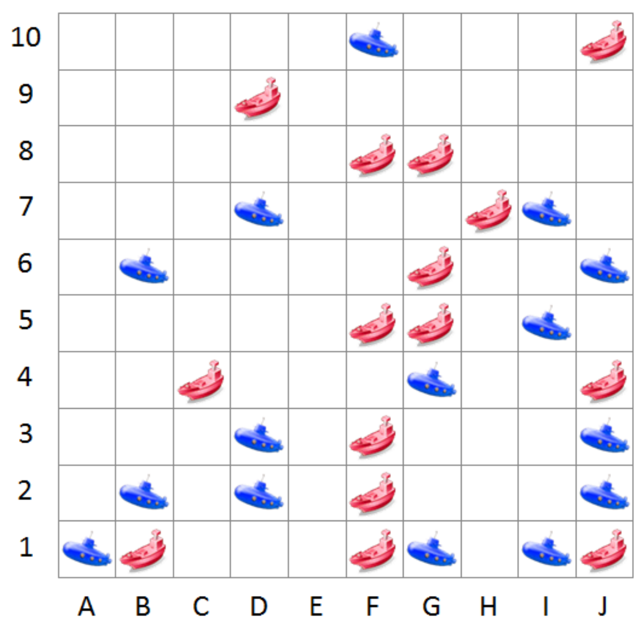
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

für alle $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$ und alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ nur ganzzahlige Ecken.

Hinweis: Nutzen Sie (b) und Folgerung 1.17.

Bemerkung: Dies ist der Beweis von (1) $\Rightarrow$ (3) für Satz 1.19.

Aufgabe 4 (Zuordnungsproblem) 10 Punkte



Obige Abbildung zeigt eine Karte mit 15 blauen, eigenen U-Booten und 15 roten, gegnerischen Schlachtschiffen. Ihr Ziel ist es, jedes U-Boot so zu bewegen, dass es das gleiche Feld wie ein Schlachtschiff besetzt. Wenn ein U-Boot das gleiche Feld wie ein Schlachtschiff besetzt, wird das Schlachtschiff zerstört. Jedes U-Boot kann nur ein Schlachtschiff zerstören. Schlachtschiffe können sich nicht bewegen.

Verwenden Sie den Satz des Pythagoras, um den Abstand zwischen den Zellen zu berechnen. Zum Beispiel beträgt die Entfernung zwischen den Zellen A1 und B3 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,236$ Längeneinheiten.

Wie groß ist die Gesamtentfernung, die die U-Boote mindestens zurücklegen müssen, um alle Schlachtschiffe zu zerstören? Wie müssen sich die U-Boote hierfür bewegen?

Stellen Sie dieses Problem als Zuordnungsproblem dar und lösen Sie es mit dem GLPK.

Hinweis: Am einfachsten ist es, mit einem kleinen Programm das LP-Modell für das GLPK zu generieren.