Kapitel 2

Repräsentationen von Graphen in Computern

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inhalt

Adjazenzmatrix

Definition 2.1

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}, n \geq 1$. Dann kann G in Form einer $n \times n$-Matrix repräsentiert werden. Es sei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

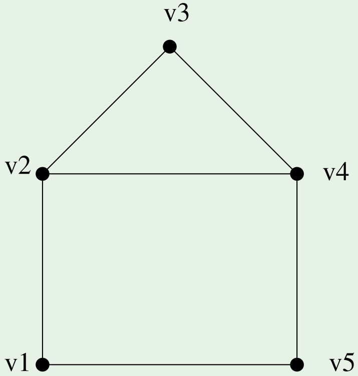
$\mathbf{A}_G = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ heißt die Adjazenzmatrix (adjacency matrix) von G.

Bemerkungen:

- $\mathbf{A}_G$ ist symmetrisch und $a_{ii} = 0, 1 \leq i \leq n$.
- Analog kann die Adjazenzmatrix für die Darstellung gerichteter Graphen verwendet werden. Sie ist dann i.d.R. nicht symmetrisch.

Adjazenzmatrix (2)

Beispiel 2.2

G = 

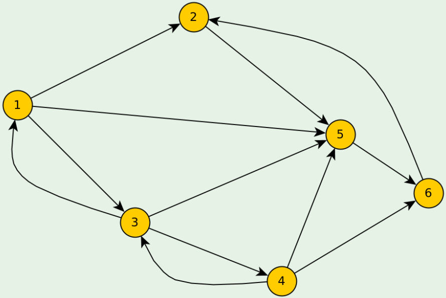
$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix (3)

- Es kann in Zeit $O(1)$ überprüft werden, ob zwei Knoten v_i und v_j adjazent sind.
- $\deg(v_i)$ ist gleich der Zeilensumme der i-ten Zeile (bzw. der Spaltensumme der i-Spalte).
  Aufwand: $O(|V|)$
- Ermittlung der Nachbarn zu einem Knoten v_i: Suche in der i-ten Zeile/Spalte
- notwendiger Speicherplatz: $O(|V|^2)$
- Platzverbrauch ineffizient für bestimmte Graphklassen, z.B. Bäume, planare Graphen (siehe Kapitel 6)

Adjazenzmatrix für gerichtete Graphen

Beispiel 2.3



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

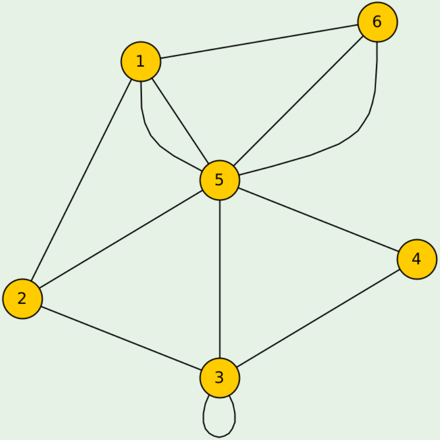
Adjazenzmatrix für nicht schlichte Graphen

- Für nicht schlichte Graphen gibt a_{ij} die Anzahl der Kanten zwischen v_i und v_j an.
- Wenn Schlingen vorliegen, sind die Diagonalelemente der entsprechenden Knoten ungleich 0. Das Element a_{ii} gibt dann die Anzahl der Schlingen am Knoten v_i an.
- Bei der Gradermittlung müssen die Diagonalelemente doppelt gezählt werden:

$$deg(v_i) = 2 \cdot a_{ii} + \sum_{k=1, k \neq i}^{n} a_{ik}.$$

Adjazenzmatrix für nicht schlichte Graphen

Beispiel 2.4



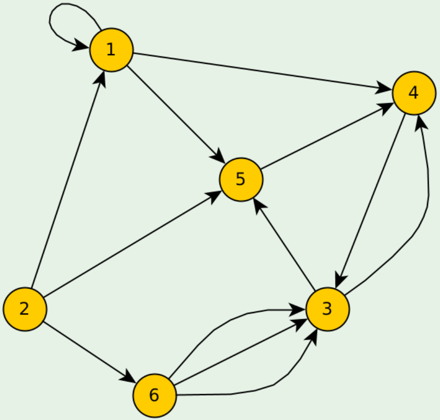
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix: gerichtet und nicht schlicht

- Prinzipiell können natürlich auch gerichtete Graphen nicht schlicht sein,
- d.h. an Knoten existieren Schlingen oder
- zwischen zwei Knoten a und b gibt es mehrere Kanten mit der gleichen Richtung (von a nach b).

Gerichteter und nicht schlichter Graph

Beispiel 2.5



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzliste

Definition 2.6

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}, n \geq 1$. Dann kann G in Form einer Liste von n-Listen A_i repräsentiert werden. Für $1 \leq i \leq n$ seien $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{n_i}$ die mit $v_i \in V$ adjazenten Knoten. Die Liste

$$A_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{n_i})$$

heißt die Adjazenzliste von $v_i \in V$.

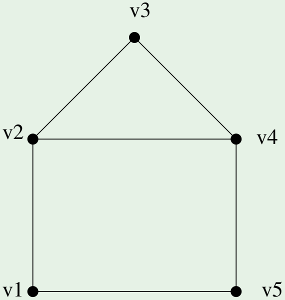
Die Liste $L_G = (A_1, \dots, A_n)$ ist die Adjazenzlistendarstellung von G.

Für einen gerichteten Graphen $G = (V, A)$ enthält die Adjazenzliste A_i die Knoten $w \in V$, für die $(v_i, w) \in A$ gilt.

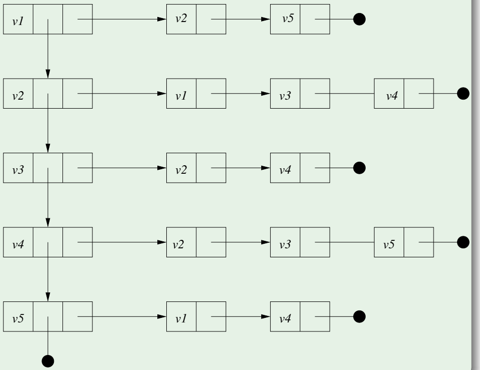
Adjazenzliste (2)

Beispiel 2.7

G =



LG =

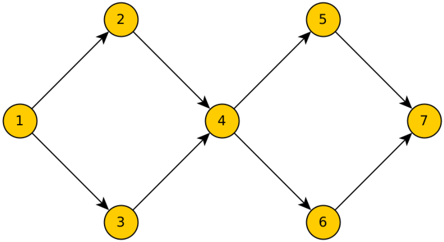


Adjazenzliste (3)

- Um zu überprüfen, ob zwei Knoten v_i und v_j adjazent sind, muss die Adjazenzliste von v_i durchsucht werden.
- Dies ist nicht in $O(1)$ möglich. Der genaue Aufwand hängt von der Implementierung der Adjazenzliste ab.
- Der Knotengrad entspricht der Länge der Adjazenzliste.
- Die Nachbarn zu einem Knoten liegen direkt in der Adjazenzliste vor.
- notwendiger Speicherplatz: $O(|V| + |E|)$

Anzahl Wege zwischen zwei Knoten (1)

Wir betrachten als Beispiel den folgenden gerichteten Graphen G mit seiner Adjazenzmatrix:



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anzahl Wege zwischen zwei Knoten (2)

Wir bilden die Potenzen der Adjazenzmatrix **A**:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } k \geq 5$$

- Das Element $a_{i,j}$ der Matrizen $\mathbf{A}^k$ gibt hier die Anzahl der (einfachen) Wege der Länge k von i nach j an.

Anzahl der Kantenzüge zwischen zwei Knoten

Satz 2.8

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
Dann gibt das Element $a_{ij}^{(r)}$ der Matrix $\mathbf{A}^r$ die Anzahl der Kantenzüge der Länge r von v_i nach v_j an.

Beweis.

Induktion über r.
$r = 1$: Damit gilt $\mathbf{A}^r = \mathbf{A}$. Die Adjazenzmatrix gibt genau die Kantenzüge der Länge 1 an.
$r \to r + 1$:

- Jeder Kantenzug der Länge $r + 1$ zwischen zwei Knoten v_i und v_j besteht aus einem Kantenzug der Länge r zwischen v_i und einem Knoten v_k sowie der Kante $\{v_k, v_j\}$.
- Nach I.V. gibt $\mathbf{A}^r$ die Anzahl der Kantenzüge der Länge r zwischen zwei Knoten an.

Fortsetzung Beweis.

- Es gilt

$$a_{ij}^{(r+1)} = \sum_{k=1}^{|V|} a_{ik}^{(r)} \cdot a_{kj}.$$

- Da $a_{kj} = 1$ gdw. zwischen v_i und v_j eine Kante ist, beschreibt diese Formel die Anzahl der Möglichkeiten, einen Kantenzug der Länge $r+1$ zwischen v_i und v_j aus einem Kantenzug der Länge r zwischen v_i und einem Knoten v_k sowie der Kante $\{v_k, v_j\}$ zu bilden.

Folgerung 2.9

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
Dann gibt das Element b_{ij} der Matrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^p$$

die Anzahl der Kantenzüge mit einer Länge $\leq p$ von v_i nach v_j an.

Folgerung 2.10

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Adjazenzmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und es sei

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{|V|-1}.$$

Dann gilt: G ist genau dann zusammenhängend, wenn $b_{ij} > 0$ für alle $i \neq j$ gilt.

Beweis.

Wenn G zusammenhängend ist,

- gibt es zwischen zwei beliebigen Knoten v_i und v_j mindestens einen Weg,
- damit auch mindestens einen einfachen Weg.
- Ein einfacher Weg hat eine Länge $\leq |V| - 1$.
- Damit liefert der einfache Weg (als Kantenzug) einen Beitrag zu b_{ij}.
- Also folgt $b_{ij} > 0$.

Fortsetzung Beweis.

Andererseits folgt aus $b_{ij} > 0$,

- dass es mindestens einen Kantenzug und damit auch einen Weg von v_i nach v_j gibt.
- Somit folgt aus $b_{ij} > 0$ für alle $i \neq j$, dass es zwischen je zwei Knoten von G einen Weg gibt.
- Damit ist G zusammenhängend.

Bemerkungen

- Weil in Dags jeder Kantenzug ein gerichteter einfacher Weg ist, liefert $\mathbf{A}^r$ dort sogar die Anzahl der einfachen Wege der Länge r.
- Auch können wir mit diesem Ansatz prinzipiell testen, ob ein gerichteter Graph kreisfrei ist: für $p = |V|$ müssen die b_{ii} alle ungleich 0 sein.
- Sowohl für die Kreisfreiheit als auch für den Zusammenhang sind diese Berechnungsansätze aber ineffizient.
- Im nächsten Kapitel werden wir effizientere Algorithmen für diese Probleme kennenlernen.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 2.11

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heißt Eigenvektor der quadratischen $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind alle Werte λ, für die ein Eigenvektor existiert.

Bemerkungen zu Eigenwerten und Eigenvektoren

Da der Nullvektor natürlich immer auf sich selbst abgebildet wird, verlangen wir von einem Eigenvektor stets $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

In der Ebene (2D) beschreiben Eigenwerte und Eigenvektoren Fixgeraden von linearen Abbildungen.

Beispiel 2.12

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat $\mathbf{A}$ hat die Eigenvektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda = 2$ und $\mu = -2$.

Die durch die Eigenvektoren definierten Geraden werden auf sich selbst abgebildet (als Menge, nicht punktweise).

Eine punktweise Abbildung wäre eine Fixpunktgerade. Dies sind Geraden definiert durch Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Eigenwertprobleme betrachtet man üblicherweise nicht in $\mathbb{R}$, sondern in $\mathbb{C}$, weil für eine allgemeine reelle Matrix die Existenz von reellen Eigenwerten nicht garantiert ist.

Beispiel 2.13

I. A. liefert eine Drehung keine Fixgeraden. So hat die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nur komplexe Eigenwerte (Drehung um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$).

Eigenwerte symmetrischer Matrizen

Satz 2.14

Es sei $\mathbf{A}$ *eine reelle symmetrische* $n \times n$*-Matrix.*

- *Dann sind alle Eigenwerte von* $\mathbf{A}$ *reell.*
- *Es gibt* n *linear unabhängige Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$*.*
- *Linear unabhängige Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$ *sind zueinander orthogonal (stehen senkrecht aufeinander).*

Berechnung von Eigenwerten und -vektoren

Die Eigenwerte ergeben sich aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \mathtt{det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|.$$

Hierbei ist **E** die n-dimensionale Einheitsmatrix.

Beispiel 2.15

Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit der p-q-Formel erhalten wir

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3 \text{ bzw. } -2.$$

Fortsetzung Beispiel.

Für $\lambda = 3$ ergibt sich der Eigenvektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ aus $u_1 = 3u_2$ (zweite Zeile von $\mathbf{A}$). Somit ist $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3.

Analog ergibt sich, dass $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -2 ist.

Beachten Sie: Die Eigenvektoren sind hier nicht orthogonal, weil $\mathbf{A}$ nicht symmetrisch ist.

Was bringen uns Eigenwerte?

Wir können bspw. die Berechnung einer n-fachen Anwendung einer linearen Abbildung deutlich beschleunigen.

Beispiel 2.16

Wo landet der Punkt $\mathbf{p} = (11, -3)$, wenn wir ihn n-mal mit der linearen Abbildung bzw. der Matrix $\mathbf{A}$ aus Beispiel 2.15 transformieren?

Bei $\mathbf{p}' = \mathbf{A}^n \mathbf{p}$

Naive Berechnung: n-fach Multiplikation von $\mathbf{A}$ mit einem Vektor, beginnend mit dem Vektor $\mathbf{p}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(0)} &= \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{(i+1)} &= \mathbf{A}\mathbf{p}^{(i)} \text{ für } i = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Es gilt dann $\mathbf{p}' = \mathbf{p}^{(n)}$.

Aufwand: $4n$ Multiplikationen und $2n$ Additionen, also $O(n)$.

Fortsetzung Beispiel.

Angenommen wir könnten $\mathbf{p}$ als Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ darstellen, also

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= \mathbf{A}^n\mathbf{p} = \mathbf{A}^n(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}^n\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}^n\mathbf{v} \\ &= \alpha\lambda_1^n\mathbf{u} + \beta\lambda_2^n\mathbf{v} \\ &= \alpha 3^n\mathbf{u} + \beta(-2)^n\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Aufwand: 2 Exponentenberechnungen, 6 Multiplikationen, 2 Additionen, also O(1)

Fortsetzung Beispiel.

Aber wie bestimmen wir α und β?

Prinzipiell kein Problem, sie ergeben sich aus dem linearen GLS

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{array}{rcrcr} 3\alpha & - & 2\beta & = & 11 \\ \alpha & + & \beta & = & -3. \end{array}$$

Lösung hier: $\alpha = 1, \beta = -4$, also

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A}^n \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^n \cdot 2^{n+3} \\ 3^n + (-1)^{n+1} \cdot 2^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Fortsetzung Beispiel.

Und für einen beliebigen Punkt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

Dann lautet das GLS

$$\begin{array}{rcrcl} 3\alpha & - & 2\beta & = & x \\ \alpha & + & \beta & = & y. \end{array}$$

Allgemeine Lösung:

$$\alpha = \frac{x+2y}{5}, \beta = \frac{3y-x}{5}.$$

Ebenfalls in $O(1)$ berechenbar.

Fazit: Für jedes $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ können wir $\mathbf{A}^n\,\mathbf{p}$ in $O(1)$ berechnen.

Berechnung der Potenzen einer Adjazenzmatrix

- Zur Berechnung der Anzahl an Kantenzügen zwischen Knoten benötigen wir die Potenzen der Adjazenzmatrix.
- Können wir auch $\mathbf{A}^k$ mit der Hilfe von Eigenwerten und -vektoren explizit berechnen?
- Ansatz: Wir betrachten die einzelnen Spaltenvektoren der Adjazenzmatrix.

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)}\cdots\mathbf{a}^{(n)}\right)$$

  wobei $\mathbf{a}^{(i)}$ der i-te Spaltenvektor von $\mathbf{A}$ ist.
- Dann gilt:

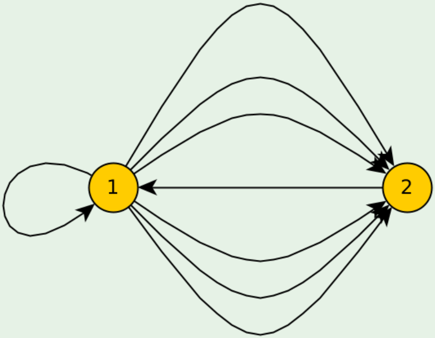
$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= \mathbf{A}^{k-1}\left(\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)}\cdots\mathbf{a}^{(n)}\right)\\ &= \left(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{a}^{(1)}\,\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{a}^{(2)}\cdots\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{a}^{(n)}\right)\end{aligned}$$

- Damit können wir $\mathbf{A}^k$ mit Hilfe der Techniken aus Beispiel 2.16 berechnen.

Berechnungsbeispiel

Beispiel 2.17

Graph zur Adjazenzmatrix **A** aus Beispiel 2.15.



Darstellung der Spalten von **A** als Linearkombination von Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung Beispiel.

$$\mathbf{A}^n = \left(\mathbf{A}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; \mathbf{A}^{n-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Es gilt

$$\mathbf{A}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{A}^{n-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + (-1)^n \cdot 2^{n+1} & 2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot (-1)^n \cdot 2^{n+1} \\ 3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n & 2 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir für alle Kantenzüge der Länge n eine explizite Formel.

Lineare Differenzengleichungen

Die Fibonacci-Zahlen F_n sind definiert durch

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n >= 2. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist ein Beispiel für eine homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Allgemein k-ter Ordnung:

$$F_n = a_1 \cdot F_{n-1} + \cdots + a_k \cdot F_{n-k}$$

Lösungsansatz für homogene lineare Differenzengleichungen

Wir stellen die homogene lineare Differenzengleichung in Matrixform dar.
Beispiel für die Fibonnaci-Zahlen:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir vorgehen wie in Beispiel 2.16:

- Wir stellen das charakteristische Polynom von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf,
- berechnen die Eigenwerte der Matrix,
- anschließend die Eigenvektoren,
- stellen $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren dar und
- erhalten so eine explizite Formel für F_n.

Fibonacci-Zahlen

Formel von Moivre-Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Charakteristisches Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Homogene lineare Differenzengleichung

Definition 2.18

Für $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$ heißt die Gleichung

$$F_n = a_1 \cdot F_{n-1} + \cdots + a_k \cdot F_{n-k}$$

homogene lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

In Matrixdarstellung können wir solch eine Differenzengleichung schreiben als

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_k \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom für eine homogen lineare Differenzengleichung

Satz 2.19

Das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ einer homogenen linearen Differenzengleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form

$$P(\lambda) = (-1)^k \left(\lambda^k - a_1 \cdot \lambda^{k-1} - a_2 \cdot \lambda^{k-2} - \cdots - a_k\right).$$

Beweis.

Vollständige Induktion und Entwicklung der Matrix $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ nach der $(k+1)$-ten Spalte. Übungsaufgabe.

Bemerkungen zum charakteristischen Polynom

- Damit können wir das charakteristische Polynom direkt an der Gleichung "ablesen", die Berechnung von $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ ist nicht notwendig.
- Da wir nur an den Nullstellen von $P(\lambda)$ interessiert sind, spielt der Faktor $(-1)^k$ keine Rolle.

Lösungen für eine homogene lineare Differenzengleichung

Satz 2.20

Es sei λ eine Nullstelle mit Vielfachheit m des charakteristischen Polynoms. Dann sind die Folgen

$$F_n = n^i \lambda^n$$

für $i = 0, \ldots, m-1$ Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung.

Beispiel 2.21

Aus der Differenzengleichung

$$F_n = 7\,F_{n-1} - 16\,F_{n-2} + 12\,F_{n-3}$$

ergibt sich das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 \\ &= (\lambda-3)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Also ist 3 eine einfache Nullstelle und 2 ist eine zweifache Nullstelle. Damit sind

$$\begin{aligned} F_n &= 3^n \\ F_n &= 2^n \\ F_n &= n\,2^n \end{aligned}$$

Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung.

Anfangswertprobleme

- In der Praxis hat man neben der Differenzengleichung häufig Anfangsbedingungen für die ersten k Folgenglieder.
- Dieses Problem nennt man Anfangswertproblem.
- Beispiel Fibonacci-Zahlen: Neben $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ wird zusätzlich $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ verlangt.
- Zur Lösung des Anfangswertproblems müssen wir eine Linearkombination der homogenen Lösungen finden.
- Dies resultiert in einem linearen Gleichungssystem.

Beispiel 2.22

Zu der Differenzengleichung von Beispiel 2.21 wollen wir das Anfangswertproblem

$$F_0 = 2, F_1 = 7, F_2 = 21$$

lösen. Es muss gelten

$$F_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 2^n + \gamma \cdot n\,2^n.$$

Daraus ergibt sich das lineare GLS

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{für } n = 0: & \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\
\text{für } n = 1: & 3\alpha & + & 2\beta & + & 2\gamma & = & 7 \\
\text{für } n = 2: & 9\alpha & + & 4\beta & + & 8\gamma & = & 21
\end{array}$$

mit der Lösung $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Also wird das Anfangswertproblem gelöst durch:

$$F_n = 3^n + 2^n + n\,2^n$$

Zusammenfassung

- Adjazenzmatrix und Adjazenzliste zur Repräsentation von Graphen
- Berechnung der Anzahl an Kantenfolgen zwischen Knoten mit Hilfe der Potenzen der Adjazenzmatrix
- Eigenwerte und Eigenvektoren zur expliziten Berechnung der Potenzen einer Adjazenzmatrix
- Eigenwerte zur Lösung von Anfangswertproblemen homogener linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten