

Statistik und Graphentheorie

Sommersemester 2014

24. März 2015

Teil Graphentheorie

Name:

Matrikelnummer:

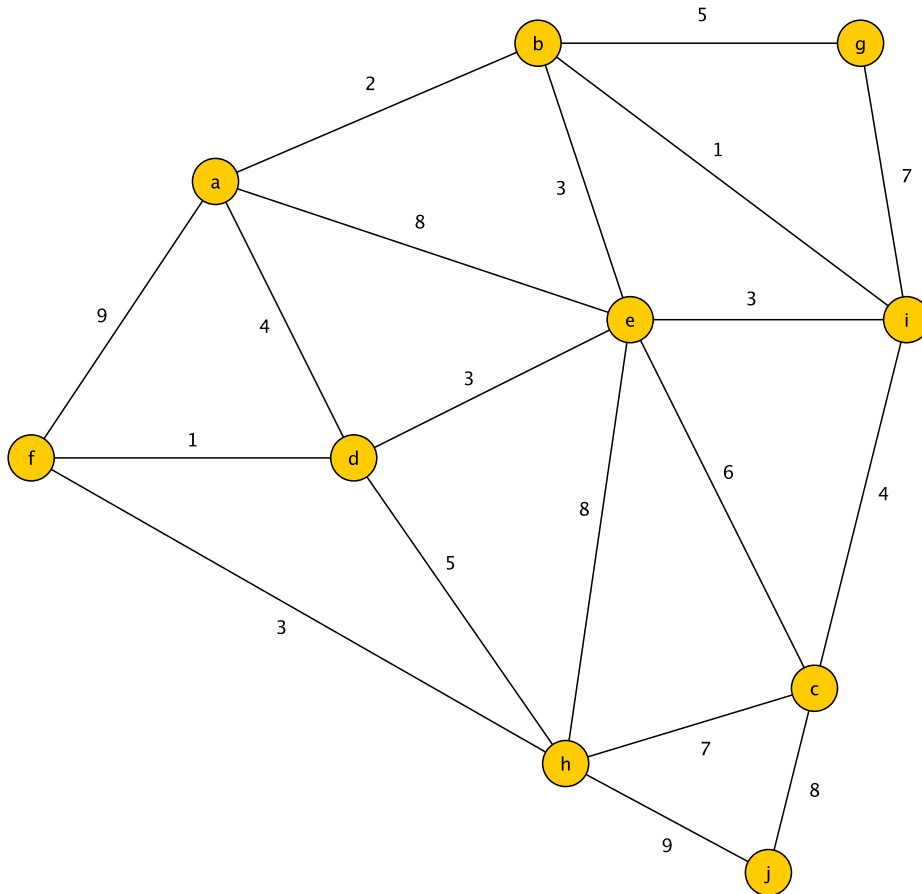
1 (12)	2 (12)	3 (12)	4 (12)	5 (12)	Σ (60)

Name:

Matrikel:

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende Netzwerk:



- (a) Berechnen Sie schrittweise die Abstände von a zu allen anderen Knoten.
- (b) Geben Sie einen kürzesten Weg von a nach j an.

Lösung:

- (a) Wir nutzen den Algorithmus von Dijkstra.

Iter.	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	u	$d(u)$	$p(u)$
1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	0	—
2		2	∞	4	8	9	∞	∞	∞	∞	b	2	a
3			∞	4	5	9	7	∞	3	∞	i	3	b
4			7	4	5	9	7	∞		∞	d	4	a
5			7		5	5	7	9		∞	e	5	b
6			7			5	7	9		∞	f	5	d
7			7				7	8		∞	c	7	i
8							7	8		15	g	7	b
9								8		15	h	8	f
10										15	j	15	c

Name:

Matrikel:

(b)

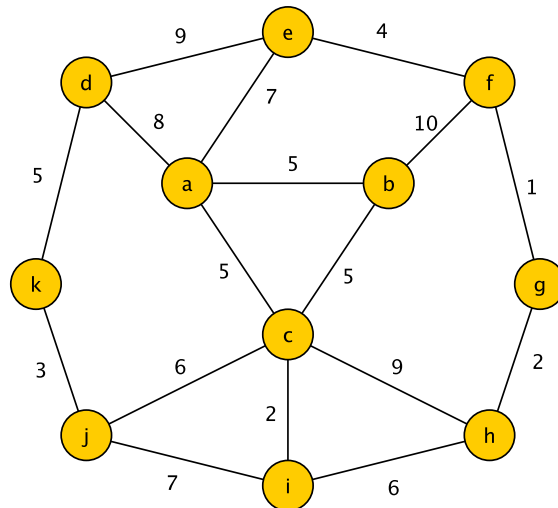
$$a \rightarrow b \rightarrow i \rightarrow c \rightarrow j$$

Name:

Matrikel:

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Der folgende Graph repräsentiert ein Straßennetz einer Stadt. Die Knoten stellen Plätze dar, die durch Straßen modelliert als Kanten verbunden sind. Die Zahlen an den Kanten geben dabei die jährlichen Kosten für die Straßenbeleuchtung an.



Da die Stadt sparen muss, sollen Teile der Straßenbeleuchtung abgeschaltet werden. Dabei sollen aber folgende Bedingungen berücksichtigt werden:

- Die drei Straßen zwischen den Plätzen a , b und c stellen den Kern der Stadt dar. Deshalb soll hier die Straßenbeleuchtung auf jeden Fall erhalten bleiben.
- Zwischen je zwei Plätzen muss es mindestens einen Weg geben, der vollständig beleuchtet ist.

Wie soll das Straßennetz beleuchtet werden, so dass die jährlichen Kosten minimal und obige Bedingungen erfüllt sind?

- Erläutern Sie kurz, wie Sie dieses Problem graphentheoretisch lösen können.
- Berechnen Sie eine Lösung.

Lösung:

- Die Lösung für die zweite Bedingung alleine wäre ein Minimalgerüst für den gegebenen Graphen. Ein Gerüst ist zusammenhängend, also existiert zwischen je zwei Knoten ein Weg. Ein Minimalgerüst wäre daher die kostengünstigste Lösung.

Allerdings muss noch die erste Bedingung berücksichtigt werden, die besagt, dass die Kanten $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$ alle beleuchtet sein müssen. Da diese Kanten einen Kreis bilden, kann kein Gerüst mehr vorliegen.

Daher berechnen wir ein Minimalgerüst und nehmen anschließend die Kanten zwischen a, b, c , die nicht im Minimalgerüst enthalten sind, einfach hinzu.

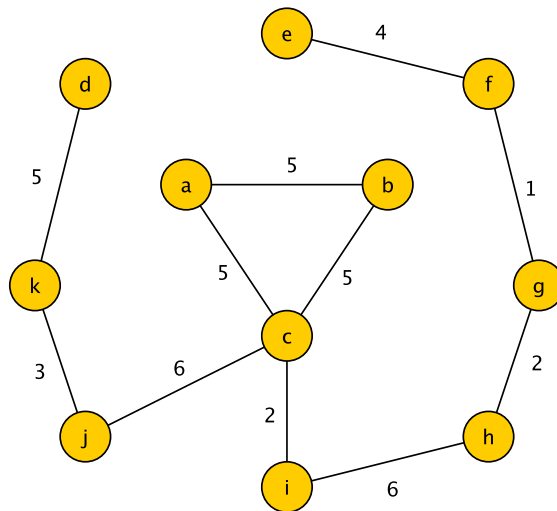
Name:

Matrikel:

(b) Wir berechnen zunächst ein Minimalgerüst mit dem Algorithmus von Kruskal.

Iter	ZHK	Kante	Länge	Sel.?
1	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}, \{i\}, \{j\}, \{k\}$	$\{f, g\}$	1	ja
2	$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f, g\}, \{h\}, \{i\}, \{j\}, \{k\}$	$\{c, i\}$	2	ja
3	$\{a\}, \{b\}, \{c, i\}, \{d\}, \{e\}, \{f, g\}, \{h\}, \{j\}, \{k\}$	$\{g, h\}$	2	ja
4	$\{a\}, \{b\}, \{c, i\}, \{d\}, \{e\}, \{f, g, h\}, \{j\}, \{k\}$	$\{j, k\}$	3	ja
5	$\{a\}, \{b\}, \{c, i\}, \{d\}, \{e\}, \{f, g, h\}, \{j, k\}$	$\{e, f\}$	4	ja
6	$\{a\}, \{b\}, \{c, i\}, \{d\}, \{e, f, g, h\}, \{j, k\}$	$\{a, b\}$	5	ja
7	$\{a, b\}, \{c, i\}, \{d\}, \{e, f, g, h\}, \{j, k\}$	$\{a, c\}$	5	ja
8	$\{a, b, c, i\}, \{d\}, \{e, f, g, h\}, \{j, k\}$	$\{b, c\}$	5	nein
9	$\{a, b, c, i\}, \{d\}, \{e, f, g, h\}, \{j, k\}$	$\{d, k\}$	5	ja
10	$\{a, b, c, i\}, \{e, f, g, h\}, \{d, j, k\}$	$\{c, j\}$	6	ja
11	$\{a, b, c, d, i, j, k\}, \{e, f, g, h\}$	$\{h, i\}$	6	ja
12	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$	STOP!		

Da die Kante $\{b, c\}$ nicht im Minimalgerüst enthalten ist, nach den Anforderungen aber beleuchtet sein soll, nehmen wir sie einfach hinzu. Der folgende Graph macht die beleuchteten Straßen deutlich.



Name:

Matrikel:

Aufgabe 3 (12 Punkte)

- (a) Geben Sie die Definition der beiden Begriffe “hamiltonscher Kreis” und “hamiltonscher Graph” an.
- (b) Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Knoten $v \in V$ heißt *Artikulationspunkt*, wenn G ohne v und die mit v inzidenten Kanten nicht mehr zusammenhängend ist.
- Kann ein hamiltonscher Graph einen Artikulationspunkt haben (nur “ja” oder “nein” als Antwort)?
- (c) Beweisen Sie Ihre Antwort aus (b).

Lösung:

- (a) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
- Ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält, heißt *hamiltonscher* Kreis.
- G heißt *hamiltonsch*, wenn G einen hamiltonschen Kreis enthält.
- (b) Nein, ein hamiltonscher Graph kann keinen Artikulationspunkt haben.
- (c) Es sei $a \in V$ ein Artikulationspunkt von G . Es sei G' der Graph G ohne den Artikulationspunkt a und die mit a inzidenten Kanten. G' ist nicht zusammenhängend. Wir wählen zwei Knoten $v \in V$ und $w \in V$ aus unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von G' .
- Ann.: G ist hamiltonsch. Ein hamiltonscher Kreis K muss dann auch die Knoten v und w enthalten. Da es zwischen v und w keinen Weg ohne a gibt (ohne a sind v und w ja nicht verbindbar), muss der Artikulationspunkt a im Kreis K zweimal vorkommen (auf dem Weg von v nach w und auf dem Weg von w nach v). Widerspruch zur Eigenschaft des hamiltonschen Kreises, dass jeder Knoten genau einmal auftritt.

Name:

Matrikel:

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \text{ mit } a_0 = 1 \text{ und } a_1 = 2.$$

Lösung:

Nach Satz 2.5 lautet das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

Mit der p-q-Formel ermitteln wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} = 6 \text{ bzw. } -1.$$

Damit sind

$$a_n = 6^n \text{ und } a_n = (-1)^n$$

die Lösungen der homogenen Differenzgleichung ohne die Anfangsbedingungen. Die Lösung des Anfangswertproblems hat die Form

$$a_n = \alpha \cdot 6^n + \beta \cdot (-1)^n.$$

Um die noch unbekannt Parameter α und β zu bestimmen, setzen wir die Anfangsbedingungen ein und erhalten damit

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad \alpha + \beta &= 1 \\ n = 1 : \quad 6\alpha - \beta &= 2 \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen führt zu $7\alpha = 3$ und damit $\alpha = \frac{3}{7}$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $\beta = \frac{4}{7}$. Also wird das Anfangswertproblem gelöst durch

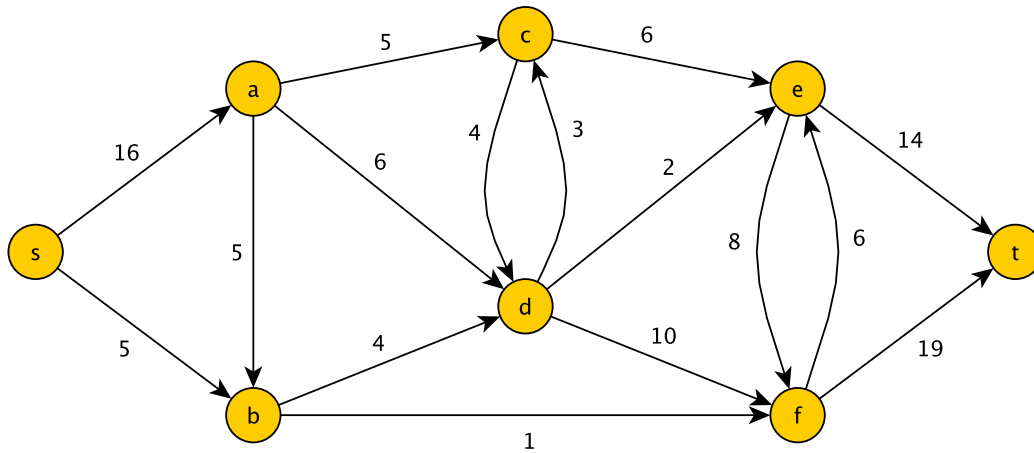
$$a_n = \frac{3}{7} \cdot 6^n + \frac{4}{7} \cdot (-1)^n.$$

Name:

Matrikel:

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Berechnen Sie für das folgende Flussnetzwerk einen Maximalfluss f . Die angegebenen Zahlen geben die Kapazität der jeweiligen Kante an.



Geben Sie für jeden Schritt einen zunehmenden Weg und den Flusswert $\Phi(f)$ an. Begründen Sie den Maximalfluss.

Lösung:

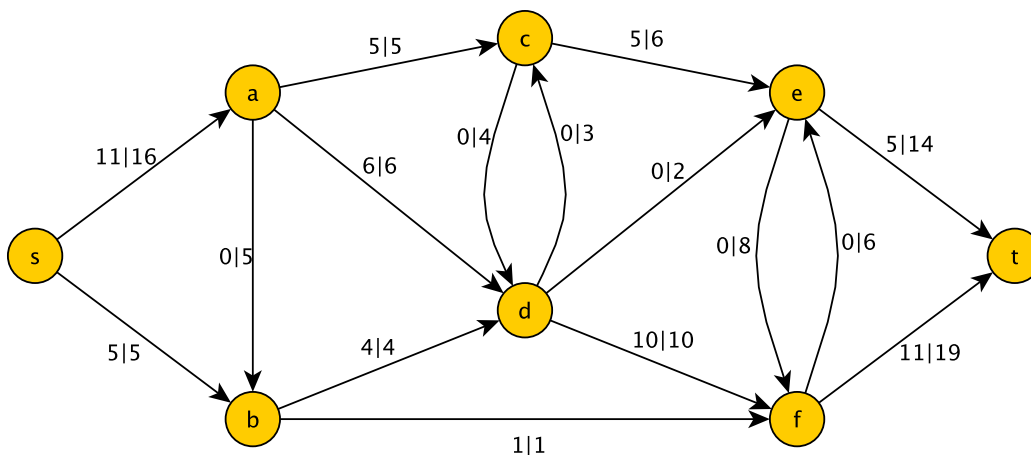
(s, a, c, e, t) ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 5, also $\Phi(f) = 5$.

(s, a, d, f, t) ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 6, also $\Phi(f) = 11$.

(s, b, d, f, t) ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 4, also $\Phi(f) = 15$.

(s, b, f, t) ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 1, also $\Phi(f) = 16$.

Aktueller Fluss:



Name:

Matrikel:

Dieser Fluss ist ein Maximalfluss, denn die Kantenmenge $S = \{(a, c), (a, d), (b, d), (b, f)\}$ bildet einen trennenden Schnitt mit der Kapazität $c(S) = 5 + 6 + 4 + 1 = 16 = \Phi(f)$. Also ist nach dem Max-flow-min-cut-Theorem f ein Maximalfluss und S ein minimaler Schnitt.

