# Statistik und Graphentheorie

Sommersemester 2014

21. September 2015

## Teil Graphentheorie

**Name:**

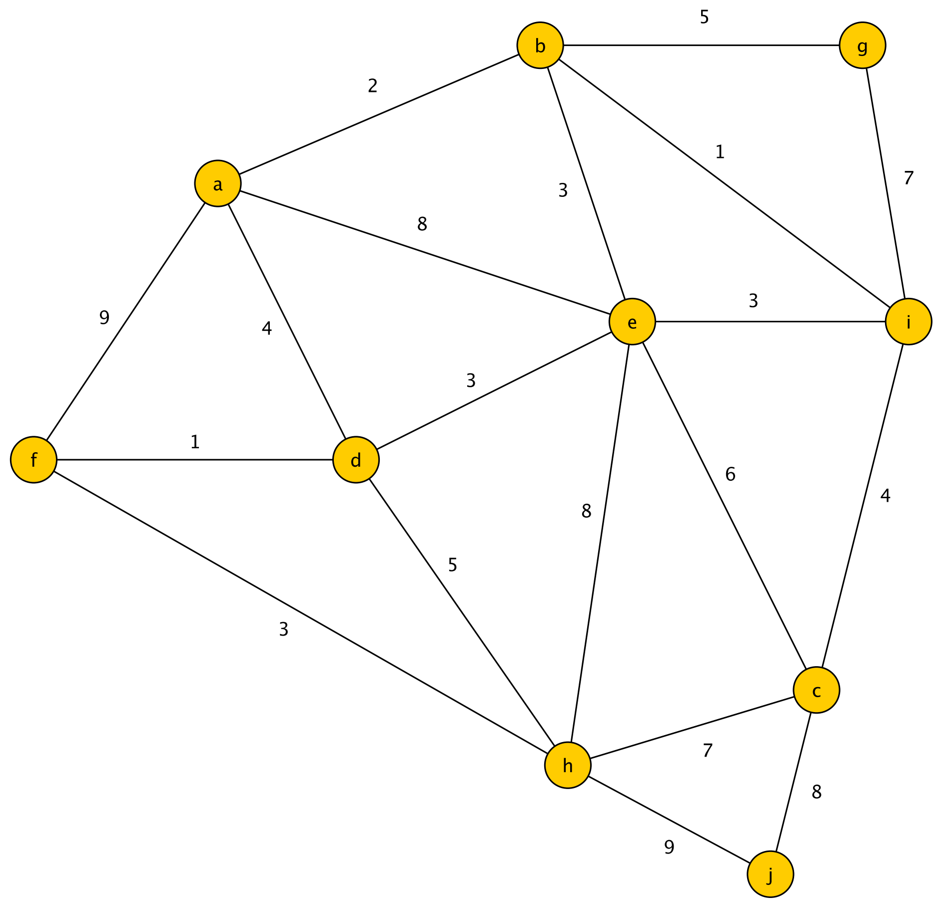
**Matrikelnummer:**

| 1 (12) | 2 (12) | 3 (12) | 4 (12) | 5 (12) | $\sum$ (60) |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | | |

**Name:** **Matrikel:**

## Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende Netzwerk:




(a) Berechnen Sie ein Minimalgerüst für diesen Graphen. Geben Sie an, welches Verfahren Sie zur Berechnung verwenden und geben Sie die Kanten des Minimalgerüstes in der Reihenfolge ihrer Selektion an.

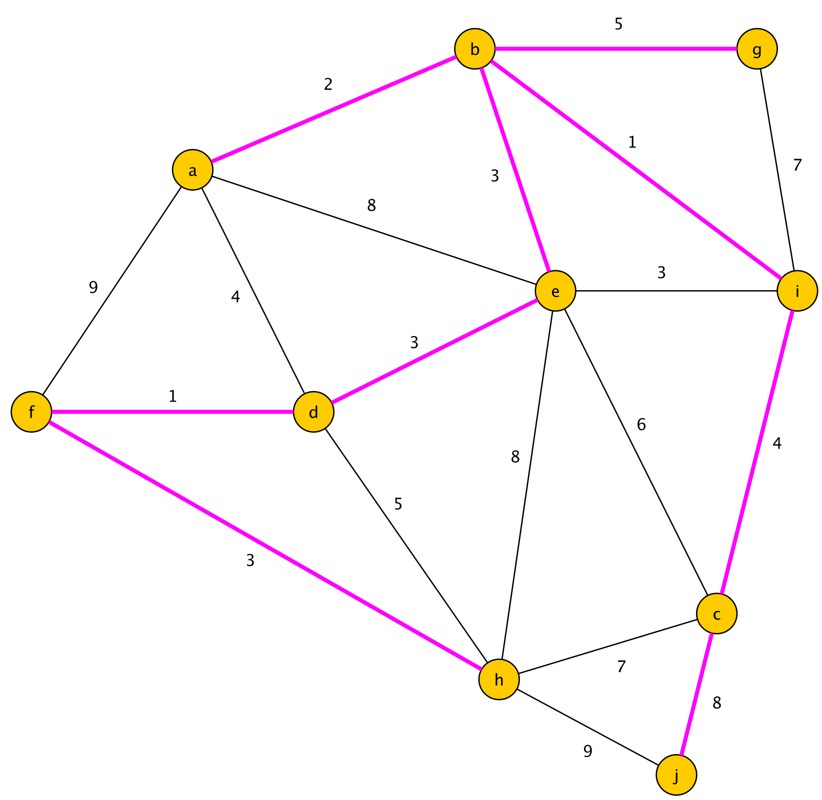
(b) Ist das von Ihnen bestimme Minimalgerüst eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:**

**Name:** **Matrikel:**

(a) Wir nutzen den Algorithmus von Kruskal.

| Iter. | ZHKs | Kante | Länge | Selektion? |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\},\{i\},\{j\}$ | $\{b,i\}$ | 1 | *ja* |
| 2. | $\{a\},\{b,i\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\},\{h\},\{j\}$ | $\{d,f\}$ | 1 | *ja* |
| 3. | $\{a\},\{b,i\},\{c\},\{d,f\},\{e\},\{g\},\{h\},\{j\}$ | $\{a,b\}$ | 2 | *ja* |
| 4. | $\{a,b,i\},\{c\},\{d,f\},\{e\},\{g\},\{h\},\{j\}$ | $\{b,e\}$ | 3 | *ja* |
| 5. | $\{a,b,e,i\},\{c\},\{d,f\},\{g\},\{h\},\{j\}$ | $\{d,e\}$ | 3 | *ja* |
| 6. | $\{a,b,d,e,f,i\},\{c\},\{g\},\{h\},\{j\}$ | $\{e,i\}$ | 3 | *nein* |
| 7. | $\{a,b,d,e,f,i\},\{c\},\{g\},\{h\},\{j\}$ | $\{f,h\}$ | 3 | *ja* |
| 8. | $\{a,b,d,e,f,h,i\},\{c\},\{g\},\{j\}$ | $\{a,d\}$ | 4 | *nein* |
| 9. | $\{a,b,d,e,f,h,i\},\{c\},\{g\},\{j\}$ | $\{c,i\}$ | 4 | *ja* |
| 10. | $\{a,b,c,d,e,f,h,i\},\{g\},\{j\}$ | $\{b,g\}$ | 5 | *ja* |
| 11. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\{j\}$ | $\{d,h\}$ | 5 | *nein* |
| 12. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\{j\}$ | $\{c,e\}$ | 6 | *nein* |
| 13. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\{j\}$ | $\{c,h\}$ | 7 | *nein* |
| 14. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\{j\}$ | $\{g,i\}$ | 7 | *nein* |
| 15. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\{j\}$ | $\{a,e\}$ | 8 | *nein* |
| 16. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\{j\}$ | $\{c,j\}$ | 8 | *ja* |
| 17. | $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ | STOP! | | |

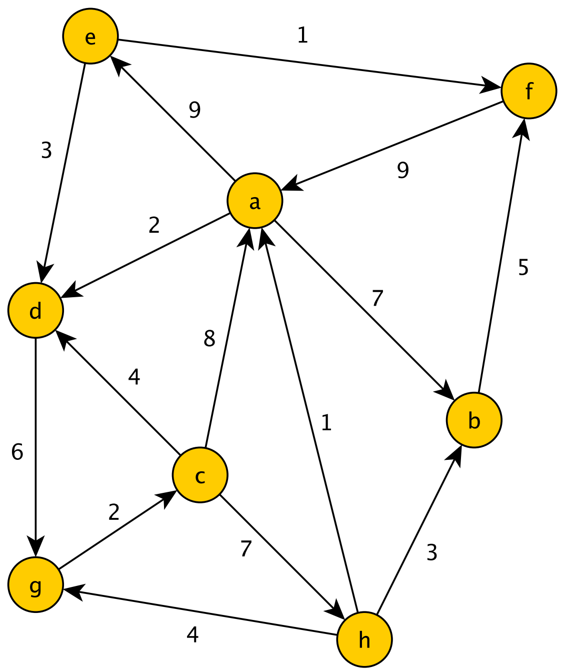



(b) Das Minimalgerüst ist nicht eindeutig. So könnte man z. B. die Kante $\{b,e\}$ gegen die Kante $\{e,i\}$ austauschen und erhält damit ein Gerüst gleicher Länge, also auch wieder ein Minimalgerüst.

**Name:** **Matrikel:**

## Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende Netzwerk:




(a) Ermitteln Sie einen kürzesten Weg von $a$ nach $h$ an. Machen Sie Ihre Herleitung deutlich.

(b) Es seien $G_1 = (V, E, c_1)$ und $G_2 = (V, E, c_2)$ zwei Netzwerke mit identischer Knoten- und Kantenmenge und für die Kantengewichtsfunktionen gelte $c_2(e) = 2c_1(e)$ für alle $e \in E$.

Sei nun $W$ ein kürzester Weg in $G_1$ zwischen den Knoten $a \in V$ und $b \in V$. Ist $W$ dann auch ein kürzester Weg in $G_2$ zwischen $a$ und $b$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Es gelte nun $c_2(e) = c_1(e) + K$ für alle $e \in E$ und $K > 0$. Ist $W$ dann auch ein kürzester Weg in $G_2$ zwischen $a$ und $b$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:**

**Name:** **Matrikel:**

(a) Wir nutzen den Algorithmus von Dijkstra.

| Iter. | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ | Knoten | Vorgänger |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $a$ | – |
| 2. | | 7 | $\infty$ | 2 | 9 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $d$ | $a$ |
| 3. | | 7 | $\infty$ | | 9 | $\infty$ | 8 | $\infty$ | $b$ | $a$ |
| 4. | | | $\infty$ | | 9 | 12 | 8 | $\infty$ | $g$ | $d$ |
| 5. | | | 10 | | 9 | 12 | | $\infty$ | $e$ | $a$ |
| 6. | | | 10 | | | 10 | | $\infty$ | $c$ | $g$ |
| 7. | | | | | | 10 | | 17 | $f$ | $e$ |
| 8. | | | | | | | | 17 | $h$ | $c$ |

Damit ist $(a, d, g, c, h)$ ein kürzester Weg von $a$ nach $h$ (mit Länge 17).

(b) Es sei $W = (v_1, \dots, v_n)$ ein Weg in $G_1$. Dann hätte dieser Weg in $G_2$ die Länge

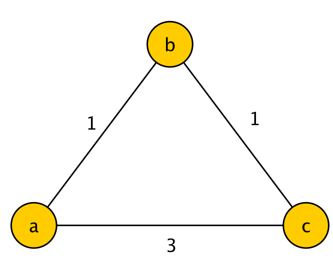
$$L_2(W) = \sum_{i=1}^{n-1} c_2(\{v_i, v_{i+1}\}) = \sum_{i=1}^{n-1} 2c_1(\{v_i, v_{i+1}\}) = 2\sum_{i=1}^{n-1} c_1(\{v_i, v_{i+1}\}) = 2 \cdot L_1(W)$$

wenn $L_1(W)$ die Länge in $G_1$ ist. Jeder Weg in $G_2$ ist also genau doppelt so lang wie in $G_1$. Damit bleibt die Ordnung der Wege bezüglich ihrer Weglänge unverändert. Ein kürzester Weg in $G_1$ ist also auch ein kürzester Weg in $G_2$.

(c) Es sei $W = (v_1, \dots, v_n)$ ein Weg in $G_1$. Dann hätte dieser Weg in $G_2$ die Länge

$$L_2(W) = \sum_{i=1}^{n-1} c_2(\{v_i, v_{i+1}\}) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_1(\{v_i, v_{i+1}\}) + K) = \sum_{i=1}^{n-1} c_1(\{v_i, v_{i+1}\}) + (n-1)K = L_1(W) + (n-1)K.$$

Damit ist die Verlängerung eines Weges von $G_1$ nach $G_2$ abhängig von der Zahl der Kanten des Weges. Ein kürzester Weg in $G_1$ muss daher nicht ein kürzester Weg in $G_2$ sein. Beispiel: Der folgende Graph sei $G_1$:




Ein kürzester Weg von $a$ nach $c$ ist $(a, b, c)$ mit der Länge 2. Mit $K = 9$ hätte dieser Weg in $G_2$ aber die Länge $(1 + 9) + (1 + 9) = 20$, wogegen der Weg $(a, c)$ die Länge $3 + 9 = 12$ hätte, also kürzer wäre.

**Name:** **Matrikel:**

## Aufgabe 3 (12 Punkte)

Der Gittergraph $Q_{n,m} = (V_{n,m}, E_{n,m})$ ist für $n, m \geq 2$ definiert durch:

$$\begin{aligned} V_{n,m} &= \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \\ E_{n,m} &= \{\{(i,j),(i',j')\} \mid |i-i'| + |j-j'| = 1\} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie für den $Q_{2,m}$ einen hamiltonschen Kreis an.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der $Q_{2n,m}$ hamiltonsch.

**Lösung:**

(a) Ein hamiltonscher Kreis für den $Q_{2,m}$ ist

$$((1,1),(1,2),\ldots,(1,m),(2,m),(2,m-1),(2,m-2),\ldots,(2,2),(2,1),(1,1)).$$

(b) $n = 1$: siehe (a), für den $Q_{2,m}$ existiert ein hamiltonscher Kreis.

$n \to n+1$:

- Nach Induktionsvoraussetzung ist der $Q_{2n,m}$ hamiltonsch.
- Im $Q_{2n,m}$ hat der Knoten $(2n,1)$ den Grad 2. Seine Nachbarknoten sind $(2n,2)$ und $(2n-1,1)$.
- Somit muss ein Hamiltonkreis für den $Q_{2n,m}$ die Kante $\{(2n,1),(2n,2)\}$ enthalten.
- Wir brechen den Kreis an dieser Kante auf und ersetzen die Kante $\{(2n,1),(2n,2)\}$ durch folgenden Weg im $Q_{2(n+1),m}$:

$$\begin{aligned} &((2n,1),(2n+1,1),(2n+2,1),(2n+2,2),\ldots, \\ &\quad (2n+2,m),(2n+1,m),(2n+1,m-1),\ldots, \\ &\quad (2m+1,3),(2n+1,2),(2n,2)) \end{aligned}$$

- Der oben angegeben Weg enthält alle Knoten des $Q_{2(n+1),m}$, die nicht im $Q_{2n,m}$ enthalten sind.
- Zusammen mit dem Rest des Hamiltonkreises des $Q_{2n,m}$ haben wir damit einen Hamiltonkreis für den $Q_{2(n+1),m}$.

**Name:** **Matrikel:**

## Aufgabe 4 (12 Punkte)

Gegeben Sie das Anfangswertproblem

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \text{ mit } a_0 = 1 \text{ und } a_1 = 2.$$

Bestimmen Sie $a_{2015}$.

**Lösung:** Um $a_{2015}$ angeben zu können, müssen wir zunächst das Anfangswertproblem lösen.

Das charakteristische Polynom der Differenzengleichung ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Als Nullstellen erhalten wir damit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 3 \text{ bzw. } -2$$

Also die Lösung des Anfangswertproblems die Form

$$\alpha 3^n + \beta(-2)^n$$

mit noch unbekannten Parametern $\alpha$ und $\beta$. Um diese zu bestimmen, setzen wir die Anfangsbedingungen ein. Wir erhalten damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} n = 0: & & \alpha & + & \beta & = & 1 \\ n = 1: & & 3\alpha & - & 2\beta & = & 2 \end{array}$$

Wenn wir die Gleichung für $n = 0$ mit 2 multiplizieren und die beiden Gleichungen dann addieren, erhalten wir $5\alpha = 4$ und damit $\alpha = \frac{4}{5}$. Daraus folgt $\beta = \frac{1}{5}$. Also ist

$$\frac{4}{5}3^n + \frac{1}{5}(-2)^n$$

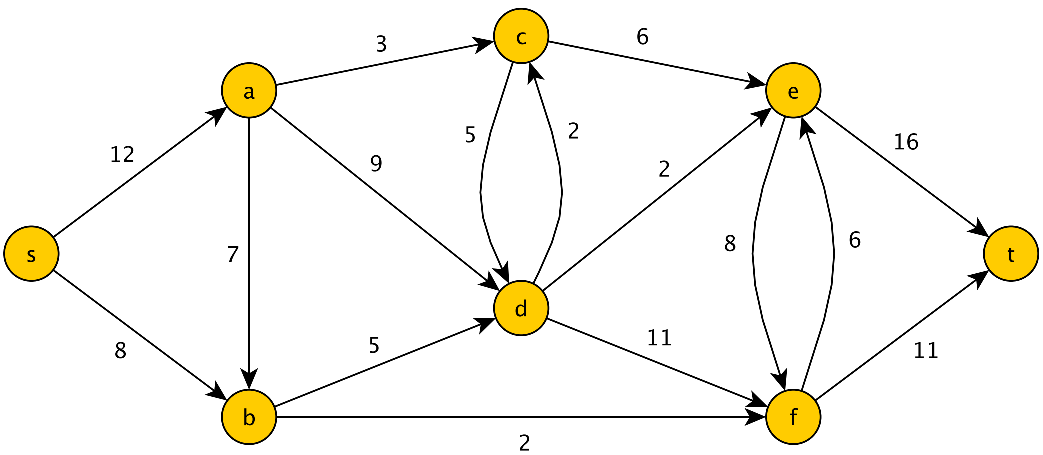
die Lösung des Anfangswertproblems. Daraus folgt

$$a_{2015} = \frac{1}{5}(4 \cdot 3^{2015} - 2^{2015}).$$

**Name:** **Matrikel:**

## Aufgabe 5 (12 Punkte)

Berechnen Sie für das folgende Flussnetzwerk einen Maximalfluss $f$. Die angegebenen Zahlen geben die Kapazität der jeweiligen Kante an.




Geben Sie für jeden Schritt einen zunehmenden Weg und den Flusswert $\Phi(f)$ an. Begründen Sie den Maximalfluss.

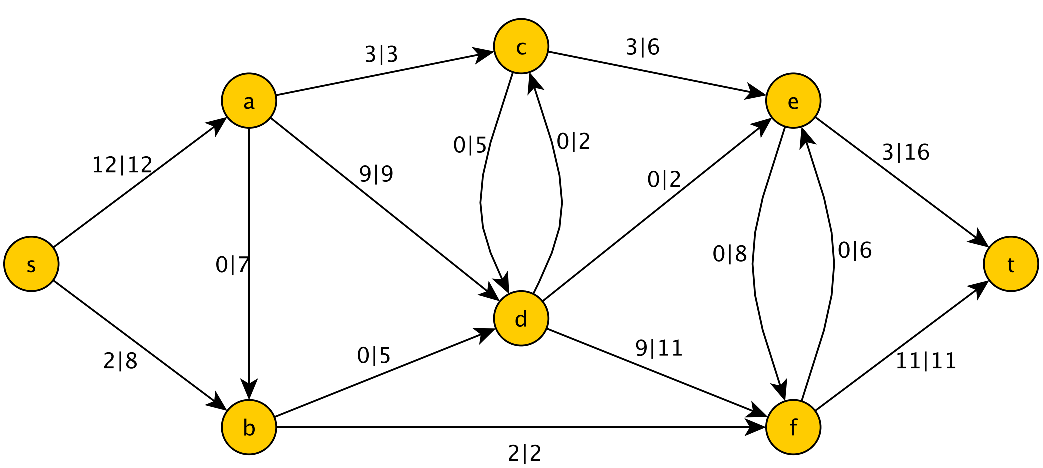
**Lösung:**

$(s, a, d, f, t)$ ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 9. Also $\Phi(f) = 9$.

$(s, a, c, e, t)$ ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 3. Also $\Phi(f) = 12$.

$(s, b, f, t)$ ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 2. Also $\Phi(f) = 14$.

Aktueller Fluss:

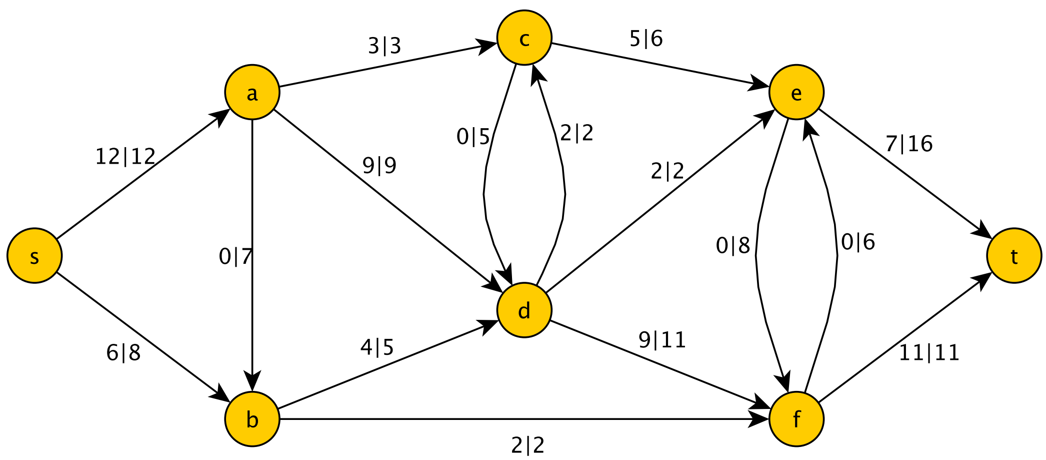


**Name:** **Matrikel:**

$(s, b, d, e, t)$ ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 2. Also $\Phi(f) = 16$.

$(s, b, d, c, e, t)$ ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 2. Also $\Phi(f) = 18$.

Aktueller Fluss:




$(s, b, d, f, e, t)$ ist ein zunehmender Weg mit einer möglichen Flusserhöhung um 2. Also $\Phi(f) = 19$.

Dieser Fluss ist ein Maximalefluss, denn die Kantenmenge $S = \{(s, a), (b, d), (b, f)\}$ bildet einen trennenden Schnitt mit Kapazität $c(S) = 19$.