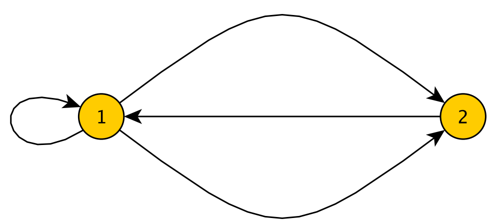
Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (Potenzen der Adjazenzmatrix)

Geben Sie für den folgenden Graphen die Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$ an und leiten Sie eine Formel für $\mathbf{A}^n$ her.



Lösung: Die Adjazenzmatrix ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \\ &= (1-\lambda)(-\lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Als Eigenwerte ergeben sich dann

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = 2 \text{ bzw. } -1.$$

Damit ist

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Die Darstellungen der Spalten von $\mathbf{A}$ als Linearkombination der Eigenvektoren lauten

$$\frac{2}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{3}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\frac{2}{3}\mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die Formel herleiten:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^n &= \mathbf{A}^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\mathbf{A}^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\mathbf{A}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\mathbf{u}+\frac{1}{3}\mathbf{v}\right) \quad \mathbf{A}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\mathbf{u}-\frac{2}{3}\mathbf{v}\right)\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{3}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{2}{3}2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1}+(-1)^n & 2^{n+1}-2(-1)^n \\ 2^n+(-1)^{n-1} & 2^n-2(-1)^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (Anfangswertprobleme)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$.

(b) $b_n = 8b_{n-1} - 21b_{n-2} + 18b_{n-3}$ mit $b_0 = 0, b_1 = 1$ und $b_2 = 2$.

Hinweis: Sie können leicht eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms raten. Wenden Sie anschließend Polynomdivision an, um die weiteren Nullstellen zu ermitteln.

Lösung:

(a)

$$
\begin{aligned}
&P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 2 \\
&\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+2} = 1+\sqrt{3} \text{ bzw. } 1-\sqrt{3} \\
&\text{also } A_n = \alpha(1+\sqrt{3})^n + \beta(1-\sqrt{3})^n
\end{aligned}
$$

Die Anfangsbedingungen ergeben

$$
\begin{array}{rcrcl}
\alpha & + & \beta & = & 0 \\
(1+\sqrt{3})\alpha & + & (1-\sqrt{3})\beta & = & 1
\end{array}
$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ und $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Also

$$
A_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n\right).
$$

(b) Aus der homogenen linearen Differenzengleichung ergibt sich das charakteristische Polynom

$$
P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 8\cdot\lambda^2 + 21\cdot\lambda - 18).
$$

Durch Ausprobieren erkennen wir schnell, dass $\lambda = 2$ eine Nullstelle der charakteristischen Polynoms ist, denn es gilt

$$
2^3 - 8\cdot 2^2 + 21\cdot 2 - 18 = 0.
$$

Jetzt führen wir Polynomdivision durch

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\lambda^3 & - & 8\lambda^2 & + & 21\lambda & - & 18 & : & \lambda - 2 \quad = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\
\lambda^3 & - & 2\lambda^2 & & & & & & \\
\hline
 & & -6\lambda^2 & + & 21\lambda & & & & \\
 & & -6\lambda^2 & + & 12\lambda & & & & \\
\hline
 & & & & 9\lambda & - & 18 & & \\
 & & & & 9\lambda & - & 18 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Also gilt

$$P(\lambda) = (-1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9),$$

umgeformt ergibt sich

$$P(\lambda) = (-1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

Der Wert 3 ist also eine zweifache Nullstelle von $P(\lambda)$. Nach Satz 2.6 sind damit 2^n, 3^n und $n \cdot 3^n$ Lösungen der homogenen Differenzengleichung.

Die Lösung des Anfangswertproblems ergibt sich durch eine Linearkombination der homogenen Lösungen. Es muss also gelten

$$b_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n + \gamma \cdot n \cdot 3^n.$$

Durch Einsetzen der ersten drei Anfangswerte b_0, b_1, b_2 für $n = 0, 1, 2$ erhalten wir das folgende lineare GLS:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & \beta & & & = & 0 \\
2\alpha & + & 3\beta & + & 3\gamma & = & 1 \\
4\alpha & + & 9\beta & + & 18\gamma & = & 2
\end{array}$$

mit der Lösung $\alpha = -4, \beta = 4, \gamma = -1$. Damit löst

$$b_n = -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - n \cdot 3^n = (4 - n)3^n - 2^{n+2}$$

das Anfangswertproblem.