Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. Peter Becker

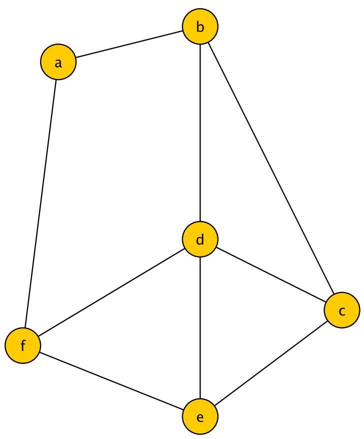
Graphentheorie

Lösungen zu Aufgabenblatt 3

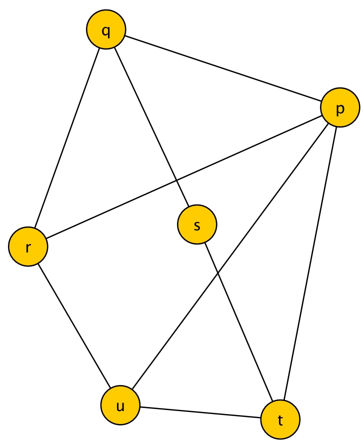
Aufgabe 1 (Isomorphie)

(a) Welche Graphen sind isomorph?

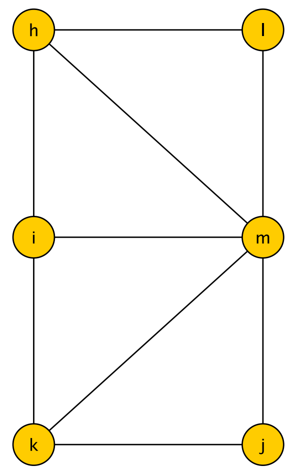
G_1



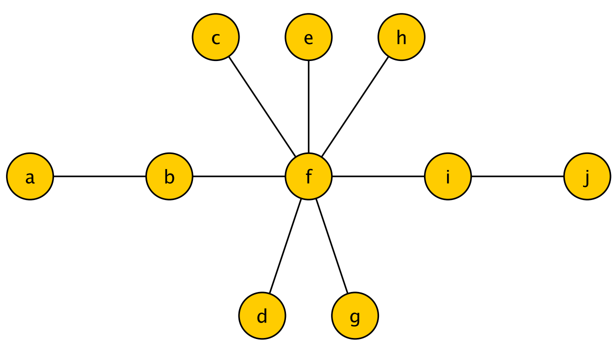
G_2



G_3



(b) Wie viele Automorphismen gibt es für den folgenden Graphen?



Lösung:

(a) G_1 und G_2 sind isomorph, z.B. ist

$$\varphi = \{a \to s, b \to q, c \to r, d \to p, e \to u, f \to t\}$$

ein Isomorphismus.

G_1 und G_3 sind nicht isomorph, denn G_1 enthält nur einen Knoten mit Grad 2, G_3 aber zwei. Auch enthält G_3 einen Knoten mit Grad 5, G_1 dagegen nicht.

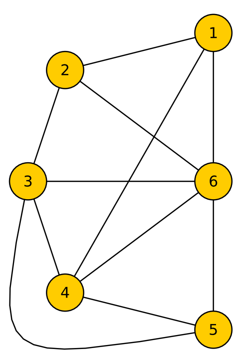
G_2 und G_3 sind nicht isomorph, denn G_2 ist isomorph zu G_1. Da aber G_1 nicht isomorph zu G_3 ist, kann auch G_2 nicht isomorph zu G_3 sein.

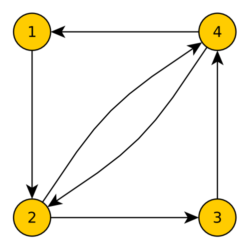
(b) Es sei φ ein Automorphismus für G. Dann gilt:

- $\varphi(f) = f$, denn f ist der einzige Knoten mit Grad 7.
- $\varphi(a) = a$ oder $\varphi(a) = j$, denn a und j sind die einzigen Knoten mit Grad 1, die adjazent zu einem Knoten mit Grad 2 sind.
- Analog gilt $\varphi(j) = j$ oder $\varphi(j) = a$.
- Durch $\varphi(a)$ sind $\varphi(b), \varphi(i)$ und $\varphi(j)$ eindeutig festgelegt, denn
  * Aus $\varphi(a) = a$ folgt $\varphi(j) = j$ (einzige Möglichkeit) und wegen der Nachbarschaft $\varphi(b) = b$ und $\varphi(i) = i$.
  * Analog folgt aus $\varphi(a) = j$: $\varphi(j) = a, \varphi(b) = i, \varphi(i) = b$.
- Die Knoten c, d, e, g, h können innerhalb dieser Knotenteilmenge beliebig abgebildet werden. Hierfür gibt es $5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten.
- Kombiniert mit den zwei Möglichkeiten zur Abbildung von a, wodurch die Knoten b, i, j dann eindeutig festgelegt sind, entstehen insgesamt $2 \cdot 120 = 240$ Möglichkeiten.

Aufgabe 2 (Adjazenzmatrix)

(a) Geben Sie für die folgenden Graphen jeweils deren Adjazenzmatrix an.





(b) Ermitteln Sie für den rechten Graphen aus (a) die Anzahl der Kantenzüge der Länge 7 zwischen den Knoten 2 und 4.

Lösung:

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

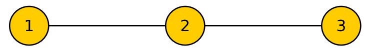
(b) Wir berechnen $\mathbf{A}^7$:

$$\mathbf{A}^7 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 10 & 7 & 11 \\ 4 & 6 & 4 & 7 \\ 7 & 11 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Also gibt es 11 Wege von 2 nach 4 der Länge 7.

Aufgabe 3 (Potenzen der Adjazenzmatrix und Anzahl Kantenzüge)

(a) Geben Sie die Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$ für den folgenden Graphen an:



(b) Beweisen Sie:

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{n-2} & f_{n-1} & f_{n-2} \\ f_{n-1} & f_n & f_{n-1} \\ f_{n-2} & f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$$

mit

$$f_n = (1+(-1)^n)2^{\frac{n}{2}}.$$

(c) Leiten Sie aus (b) eine Formel für die Anzahl der Kantenzüge mit einer Länge $\leq p$ zwischen den Knoten 1 und 2 her.

Lösung:

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $n = 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} f_{-1} &= (1+(-1)^{-1})2^{\frac{-1}{2}} = 0 \\ f_0 &= (1+(-1)^0)2^{\frac{0}{2}} = 2 \\ f_1 &= (1+(-1)^1)2^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^1$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}\,\mathbf{A}^n \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n-2} & f_{n-1} & f_{n-2} \\ f_{n-1} & f_n & f_{n-1} \\ f_{n-2} & f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n & f_{n-1} \\ 2f_{n-2} & 2f_{n-1} & 2f_{n-2} \\ f_{n-1} & f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n & f_{n-1} \\ f_n & f_{n+1} & f_n \\ f_{n-1} & f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\#\text{Kantenzüge} &= \sum_{k=1}^{p} a_{1,2}^{(k)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} f_{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1} f_{k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1} (1+(-1)^k)2^{\frac{k}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0, k\, gerade}^{p-1} (1+(-1)^k)2^{\frac{k}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} 2\cdot 2^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} 2^{j} \\
&= 2^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} - 1
\end{aligned}
$$