Graphentheorie

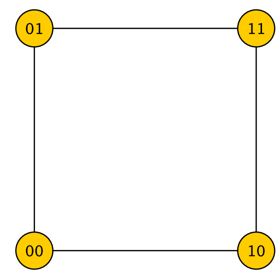
Lösungen zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (Hypercube, Handschlaglemma)

Der n-*dimensionale Hypercube* $H_n = (V_n, E_n)$ ist wie folgt definiert:

- V_n ist die Menge der Bitstrings der Länge n.
- Für zwei Bitstrings $p, q \in V_n$ gilt $\{p, q\} \in E_n$ genau dann, wenn p und q sich in genau einem Bit unterscheiden.

Das Diagramm rechts zeigt den 2-dimensionalen Hypercube H_2.



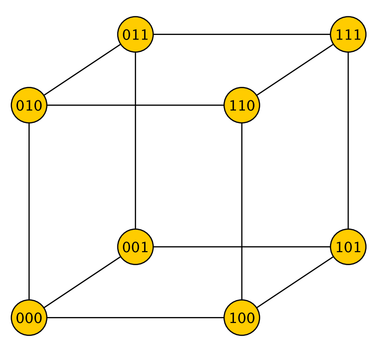
(a) Zeichnen Sie ein Diagramm des dreidimensionalen Hypercube H_3.

(b) Wie viele Knoten und wie viele Kanten hat der H_n? Geben Sie hierfür Formeln an und begründen Sie Ihre Formeln.

Hinweis zur Ermittlung der Kantenanzahl: Nutzen Sie das Handschlaglemma.

Lösung:

(a)



(b) In einem Bitstring der Länge n kann jedes Bit die Werte 0 oder 1 annehmen. Damit folgt:

$$|V_n| = 2^n.$$

Für alle Knoten $v \in V_n$ gilt $\deg(v) = n$, denn in einem Bitstring der Länge n hat man genau n Möglichkeiten, ein Bit zu ändern.

Mit dem Handschlaglemma folgt:

$$\begin{aligned} 2|E_n| &= \sum_{v \in V_n} \deg(v) \\ &= \sum_{v \in V_n} n \\ &= n\, 2^n. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|E_n| = n\, 2^{n-1}.$$

Aufgabe 2 (Grad, Handschlaglemma)

(a) Finden Sie zwei verschiedene schlichte Graphen mit 6 Knoten, in denen jeder Knoten den Grad 2 hat.

(b) Bei einer Party begrüßen sich die anwesenden Gäste, indem sie miteinander anstoßen.

Zeigen Sie: Es gibt zwei Gäste, die mit der gleichen Anzahl an Personen angestoßen haben.

(c) Ein Graph $G = (V, E)$, dessen Knoten alle den gleichen Grad r haben, heißt *r-regulär* bzw. einfach nur *regulär*.

Zeigen Sie: Für einen regulären Graphen gilt:

$$|E| = \frac{1}{2} \cdot r \cdot |V|.$$

(d) Begründen Sie: Wenn r ungerade ist, muss die Anzahl der Knoten eines r-regulären Graphen gerade sein.

Lösung:

(a)

(b) Jeder Gast stellt einen Knoten in einem Graphen $G = (V, E)$ dar. Wenn zwei Gäste $v, w \in V$ anstoßen, dann nehmen wir in E die Kante $\{v, w\}$ auf.

Nach Satz 1.14 gibt es dann in G zwei Knoten, die den gleichen Grad haben, also zwei Gäste, die mit der gleichen Anzahl an Personen angestoßen haben.

(c) Wir folgern aus dem Handschlaglemma:

$$
\begin{aligned}
2|E| &= \sum_{v \in V} \deg(v) \\
\Rightarrow \quad |E| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) \\
\Rightarrow \quad |E| &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot |V|.
\end{aligned}
$$

(d) Folgt direkt aus Folgerung 1.13.

Aufgabe 3 (Schubfachprinzip)

(a) Zeigen Sie: Unter je fünf Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens $1/2$ ist.

(b) Unter je 17 Punkten in einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1 gibt es stets zwei, deren Abstand höchstens d ist.

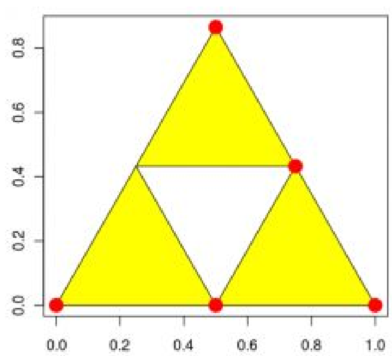
Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für d und zeigen Sie mit diesem Wert die Gültigkeit der Aussage.

(c) Unter je s Punkten in einem Würfel der Seitenlänge 3 gibt es stets zwei, die einen Abstand $\leq \sqrt{3}$ haben.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert für s.

Lösung:

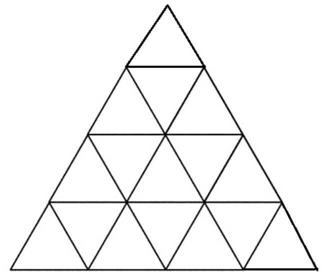
(a) Wir verbinden paarweise die Mittelpunkte der Seiten des gleichseitigen Dreiecks:



Dadurch entstehen vier gleichseitige (Unter-)Dreiecke, deren Seitenlänge stets $1/2$ ist. Zwei Punkte in solch einem Dreieck haben demnach einen Abstand $\leq 1/2$.

Nach dem Schubfachprinzip müssen von fünf Punkten, die in dem umschließenden Dreieck mit Seitenlänge 1 liegen, mindestens zwei Punkte in dem selben Unterdreieck liegen, denn es gibt ja nur vier Unterdreiecke. Diese beiden Punkte haben dann einen Abstand $\leq 1/2$.

(b) Wenn man die vier Unterdreicke aus (a) wieder jeweils durch Halbieren der Seitenlänge unterteilt, entstehen insgesamt 16 gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge $d = 1/4$.



Von 17 Punkten müssen also mindestens zwei im selben Unterdreieck liegen, die dann einen Abstand $\leq 1/4$ haben.

(c) Analog zu den Aufgaben (a) und (b), nur dass hier entlang der drei Würfelachsen unterteilt wird. Jede Achse wird in 3 Teile der Länge 1 unterteilt. Dadurch entstehen $3^3 = 27$ Unterwürfel, deren Raumdiagonale jeweils die Länge $\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ hat. Also $s = 28$.

Aufgabe 4 (Schubfachprinzip)

Gegeben seien n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2^n - 2$. Zeigen Sie, dass es dann zwei nichtleere Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i$ gibt.

Lösung: Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ hat 2^n verschiedene Teilmengen. Somit hat man 2^n mögliche Indexmengen I für die Summenbildung $\sum_{i \in I} a_i$.

Wir ordnen einer Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ nun die Summe $\sum_{i \in I} a_i$ zu.

N.V. gilt

$$0 \leq \sum_{i \in I} a_i \leq 2^n - 2.$$

Damit verteilen sich die 2^n Summen auf $2^n - 1$ verschiedene Werte. Nach dem Schubfachprinzip muss es also zwei Indexmengen J_1 und J_2 geben mit

$$\sum_{i \in J_1} a_i = \sum_{i \in J_2} a_i.$$

Für diese beiden Indexmengen muss aber noch nicht, wie verlangt, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ gelten.

Gilt $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, dann konstruieren wir zwei andere Mengen wie folgt:

$$\begin{aligned} I_1 &:= J_1 \setminus J_2 = J_1 \setminus (J_1 \cap J_2) \\ I_2 &:= J_2 \setminus J_1 = J_2 \setminus (J_1 \cap J_2). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in J_1} a_i - \sum_{i \in J_1 \cap J_2} a_i = \sum_{i \in J_2} a_i - \sum_{i \in J_1 \cap J_2} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i.$$