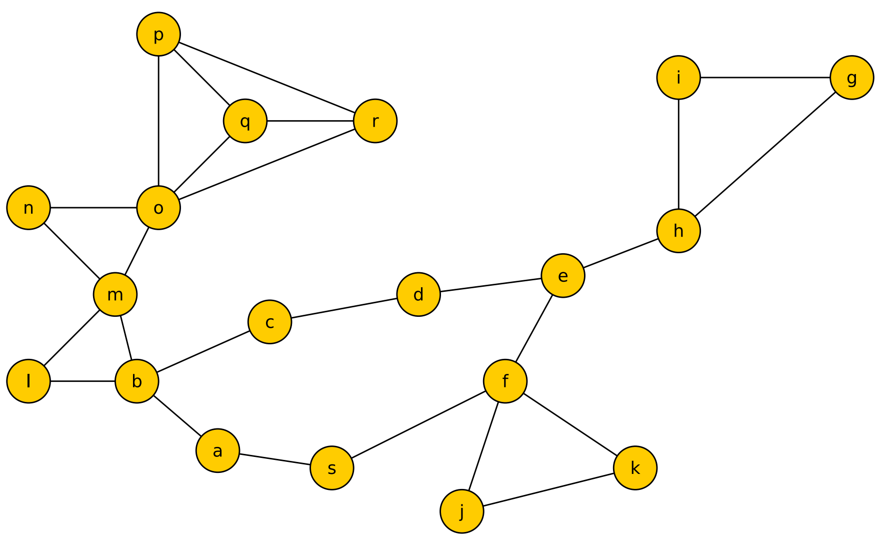
Graphentheorie

Aufgabenblatt 8

Besprechung am 6. Januar 2020 in den Übungen

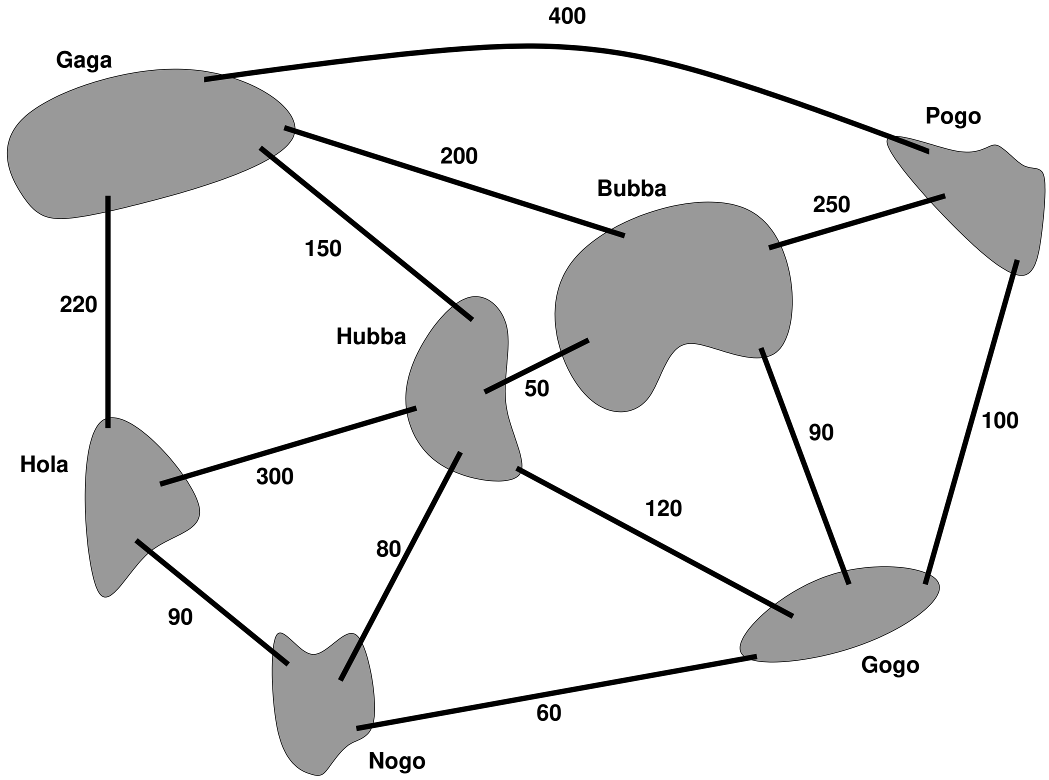
Aufgabe 1 (Anzahl an Gerüsten)

Wie viele verschiedene Gerüste gibt es für den folgenden Graphen?



Aufgabe 2 (Minimalgerüst)

Der Inselstaat Hubba-Bubba besteht aus insgesamt sieben Inseln, die durch Brücken miteinander verbunden sind (siehe Zeichnung). Da die Wartung und der Betrieb der Brücken auf die Dauer zu teuer wird, überlegt man, einige der Brücken stillzulegen. Die Zahlen an den Brücken geben die jährlichen Wartungskosten an.



Welche Brücken sollen stillgelegt werden, so dass die jährlichen Wartungskosten minimal werden, unter der Bedingung, dass jede Insel von jeder anderen Insel erreichbar bleibt?

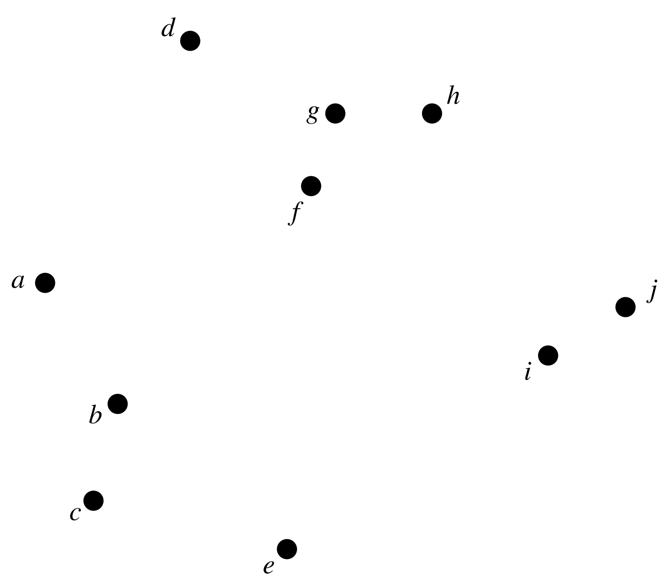
(a) Erläutern Sie kurz, wie Sie das oben beschriebene Problem lösen können und berechnen Sie eine Lösung.

(b) Ist die in (a) ermittelte Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (TSP-Heuristik)

Gegeben Sei die folgende Punktmenge im $\mathbb{R}^2$:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
x	1350	2025	1800	2700	3600	3825	4050	4950	6030	6750
y	4500	5625	6525	2250	6975	3600	2925	2925	5175	4725



Die x-Koordinate wächst hierbei nach rechts, die y-Koordinate nach *unten*!

(a) Berechnen Sie ein Minimalgerüst für diese Punktmenge. Die Punkte entsprechen hierbei den Knoten eines vollständigen Graphen und das Gewicht einer Kante ergibt sich durch den euklidischen Abstand der beiden beteiligten Punkte (Knoten).

(b) Konstruieren Sie aus dem Minimalgerüst von (a) eine TSP-Tour, die höchstens doppelt so lang ist, wie eine optimale TSP-Tour.

(c) Versuchen Sie anschließend, die TSP-Tour von (b) mit Hilfe der Algorithmen `2-opt` und `3-opt` so weit wie möglich zu verbessern. Geben Sie die jeweiligen Austauschschritte an.

Aufgabe 4 (Clusteranalyse)

Gegeben sei eine Menge V von Objekten sowie eine Metrik (Abstandsmaß) $d(u, w)$, die für je zwei Elemente $u, w \in V$ deren Abstand angibt.

Die Menge V soll nun so in zwei nichtleere disjunkte Teilmenge U und W zerlegt werden, dass die Größe

$$d(U, W) := \min_{u \in U, w \in W} d(u, w)$$

maximiert wird.

Skizzieren Sie kurz, wie Sie dieses Problem mit Hilfe der Graphentheorie lösen können.

Zerlegen Sie anschließend die Menge $V = \{a, b, d, f, k, w\}$ in zwei Teilmengen U und W, so dass $d(U, W)$ maximal wird. Für die Elemente von V gelten dabei die folgenden Abstände an:

	a	b	d	f	k	w
a	0	91	80	259	70	121
b	91	0	77	175	27	84
d	80	77	0	232	47	29
f	259	175	232	0	189	236
k	70	27	47	189	0	55
w	121	84	29	236	55	0