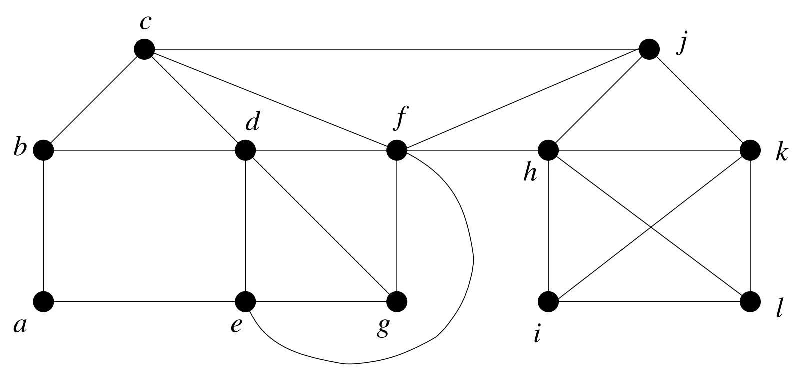
Graphentheorie

Aufgabenblatt 5

Besprechung am 18. November 2019 in den Übungen

Aufgabe 1 (Tiefen- und Breitensuche)

Gegeben sei der folgende Graph:



(a) Geben Sie für den obigen Graphen die Tiefensuchnummern $t(v)$ sowie die Menge B der Baumkanten an, die sich bei der Tiefensuche ergeben. Starten Sie die Suche bei Knoten a. Die Adjazenzlisten der Knoten seien alphabetisch sortiert.

(b) Geben Sie für den obigen Graphen die Breitensuchnummern $b(v)$ sowie die Menge B der Baumkanten an, die sich bei der Breitensuche ergeben. Starten Sie die Suche bei Knoten a. Die Adjazenzlisten der Knoten seien alphabetisch sortiert.

Aufgabe 2 (Anwendung Tiefensuche)

Auf der Homepage der Vorlesung finden Sie Beispielprogramme für die Tiefen- und die Breitensuche. Passen Sie das Beispielprogramm für die Tiefensuche so an, dass Sie damit die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen berechnen können.

Als Testdaten finden Sie auf der Homepage die Adjazenzliste eines Graphen mit 500 Knoten ($V = \{0, \ldots, 499\}$). Wie viele Zusammenhangskomponenten hat dieser Graph?

Aufgabe 3 (Anwendung der Breitensuche)

Zur Erinnerung: Die *Länge* eines Kantenzugs ist definiert als die Anzahl der Kanten des Kantenzugs.

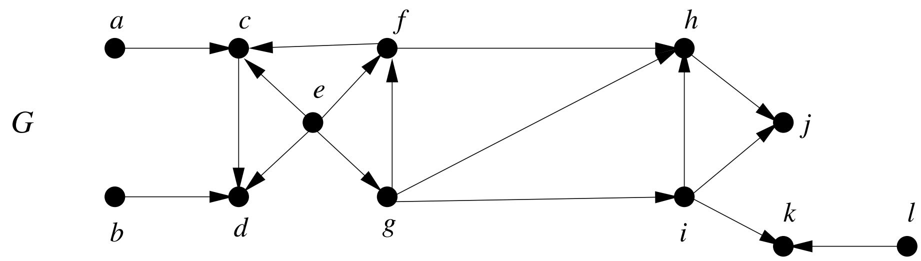
Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Wir definieren als *Abstand* $d(v, w)$ zweier Knoten $v, w \in V$ von G das Minimum der Längen aller Kantenzüge von v nach w. Der *Durchmesser* $diam(G)$ von G ist der größte Abstand zwischen zwei Knoten, also $diam(G) = \max_{v,w \in V} d(v, w)$.

Passen Sie das Beispielprogramm zur Breitensuche so an, dass Sie damit den Durchmesser eines Graphen berechnen können.

Auf der Homepage finden Sie einen Link zu einem zusammenhängenden Beispielgraphen mit 150 Knoten. Berechnen Sie für diesen Graphen den Durchmesser.

Aufgabe 4 (Topologisches Sortieren)

Ermitteln Sie für den folgenden gerichteten Graphen $G = (V, A)$ eine topologische Sortierung der Knoten.



Aufgabe 5 (Anzahl topologischer Sortierungen)

Die DAGs $G_n = (V_n, A_n)$ sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} V_n &= \{1, \ldots, n\} \times \{-1, 1\} \\ A_n &= \{((i, j), (i-1, j)) \mid i = 2, \ldots, n \text{ und } j = -1, 1\} \cup \\ & \{((i, (-1)^i), (i-1, (-1)^{i-1})) \mid i = 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

(a) Zeichnen Sie Diagramme für die DAGs G_1 bis G_3.

(b) Es sei S_n die Anzahl an topologischen Sortierungen des G_n. Zeigen Sie: $S_1 = 2, S_2 = 5$ und $S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$.

(c) Leiten Sie eine Formel für S_n her.