Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

Analysis

Klausur Wintersemester 2017/18
Musterlösungen

4. April 2018

Name: **Vorname:**

Matrikelnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte	10	10	10	10	10	10	60
erreicht							

Mit 24 Punkten haben Sie die Klausur bestanden, ab 48 Punkte erhalten Sie eine 1.0.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Sie müssen Ihre Antworten begründen.

Tipp: Schauen Sie sich erstmal alle Aufgaben an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2.5+2.5+2.5+2.5=10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^8 + 5n^7 + 2n^4 + 2n^2 + 1}{9n^6 - 4n^5 + n + 1}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sin(n)}{n^2 + n + 1}$$

(c)

$$\lim_{x\nearrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\log(-x)}{x + \frac{\pi}{3}}$$

(d)

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{2x\sin(x) + x^2\cos(x)}$$

Musterlösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^8 + 5n^7 + 2n^4 + 2n^2 + 1}{9n^6 - 4n^5 + n + 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2 + 5n + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6}}{9 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^6}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n(2n-5) + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^6}}{9 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^6}} \\
&= \frac{-\infty \cdot \infty + 0 + 0 + 0}{9 - 0 + 0 + 0} = -\infty
\end{aligned}$$

Hinweis zur Korrektur: Es reicht auch, wenn sowas geschrieben wird wie n^2 *setzt sich gegenüber* n *durch* o.ä.

(b) Wegen

$$0 \quad \leq \quad \frac{n + \sin(n)}{n^2 + n + 1} \leq \frac{n+1}{n^2 + n} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

folgt nach Sandwich-Lemma/Schachtelungsprinzip ebenfalls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sin(n)}{n^2 + n + 1} = 0$$

(c) Da log auf $\mathbb{R}_+$ stetig ist, folgt $\lim_{x \nearrow -\frac{\pi}{3}} \log(-x) = \log\left(\frac{\pi}{3}\right) < \infty$. Da weiterhin die Funktion $f(x) := x + \frac{\pi}{3}$ stetig ist, gilt $\lim_{x \nearrow -\frac{\pi}{3}} = 0$, und somit, da hier der linksseitige Grenzwert betrachtet wird und somit $x - \frac{\pi}{3} < 0$:

$$\lim_{x \nearrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\log(-x)}{x + \frac{\pi}{3}} = -\infty$$

(d) Verwende zweimal die Regel von de l'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \searrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{2x\sin(x) + x^2\cos(x)} &= \left(\frac{0}{0} =\right) \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(x)}{2x\cos(x) + 2\sin(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)} \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(x)}{4x\cos(x) + 2\sin(x) - x^2\sin(x)} = \left(\frac{0}{0} =\right) \\
&= \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos(x)}{4\cos(x) - 4x\sin(x) + 2\cos(x) - x^2\cos(x) - 2x\sin(x)} \\
&= \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+3+2+3=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie jeweils an, welches Kriterium Sie verwenden!

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-3n+1}$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

Berechnen Sie auch den Grenzwert dieser Reihe!

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{5n+27}\right)^n$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}}(x+2)^n$$

Musterlösung:

(a) Da $-3n+1<0$ für $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\frac{n+1}{n^2-3n+1} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante, und die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium.

(b) Es handelt sich hierbei um die geometrische Reihe, welche (absolut) konvergiert:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} &= 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 - \frac{1}{3}\right) \\
&\overset{|\frac{1}{3}|<1}{=} 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 3\left(\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) Wegen

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{5n+27}\right)^n\right|} = \frac{n}{5n+27} = \frac{1}{5+\frac{27}{n}} \to \frac{1}{5} < 1$$

konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium (absolut).

(d) Es sei $a_n := \frac{n^2}{2^{n+1}}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{2^{n+1}}}{\frac{(n+1)^2}{2^{n+2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Potenzreihe für $|x+2| < 2$, also für $-2 < x+2 < 2$, also für $x \in (-4, 0)$, (absolut).

Es geht selbstverständlich auch mit dem Quotientenkriterium: Sei $a_n := \frac{n^2}{2^{n+1}}(x+2)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+2}}}{\frac{n^2}{2^{n+1}}}\cdot\frac{|x+2|^{n+1}}{|x+2|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot|x+2| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot|x+2| \\ &= \frac{1}{2}|x+2| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x+2| < 2 \end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium für alle $|x+2| < 2$, also für $x \in (-4, 0)$ (s.o.), (absolut).

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Gegeben seien die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$g_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|}$$

Begründen Sie, daß alle g_n stetig sind! Ermitteln Sie die Grenzfunktion

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Was ist die Ursache dafür, daß g als Grenzfunktion stetiger Funktionen nicht stetig ist?

(b) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sqrt{x}$$

genau eine Lösung in $\mathbb{R}_+$ hat!

Musterlösung:

(a) Die Funktion nx ist (als Polynom 1. Grades) stetig, die Betragsfunktion ist ebenfalls stetig. Da $\forall_{n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}}\ 1+|nx| > 0$, sind die g_n als Quotienten stetiger Funktionen, wobei der Nenner nicht Null wird, stetig. Wegen

$$g_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + |x|}$$

gilt für die Grenzfunktion

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Weiterhin gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $g_n(0) = 0$ und somit auch

$$\lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$$

Also lautet die Grenzfunktion

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig. Die Ursache dafür ist, daß die Funktionenfolge g_n nicht gleichmäßig gegen g konvergiert.

(b) Bestimme die Nullstellen der Funktion

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} - \sqrt{x}$$

Da $1 + x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist die Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ als rationale Funktion, bei der der Nenner nicht Null wird, stetig. Da $\sqrt{x}$ nach Vorlesung auf $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ stetig ist, ist f ebenfalls auf $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ stetig. Wegen $g(0) = 1 > 0$ und $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$, besitzt f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im offenen Intervall $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}_+$ (Hinweis zur Korrektur: Gemäß Aufgabenstellung muß das Intervall nicht angegeben werden!).
f ist als Zusammensetzung einer rationalen Funktion und der Wurzelfunktion, die nach Vorlesung auf $\mathbb{R}_+$, differenzierbar ist, ebenfalls auf $\mathbb{R}_+$ differenzierbar, mit

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$$

für $x \in \mathbb{R}_+$. Also ist f auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend. Somit ist die Nullstelle eindeutig.

Hinweis zur Korrektur: Die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f müssen hier nicht so detailliert begründet werden. Auch auf die Unterscheidung zwischen $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}_+$ sollte hier keinen Wert gelegt werden!

Aufgabe 4 (4+1+2+2+1=10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

(a) Wo ist die Funktion konvex bzw. konkav? Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

(b) Besitzt die Funktion Sattelpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von f, also den Grenzwert für x gegen $+\infty$ und $-\infty$.

(d) Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f für x gegen -1.

(e) Skizzieren Sie die Funktion!

Musterlösung:

(a) Berechne zunächst erste und zweite Ableitung von f mithilfe der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x+1)2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{(x+1)^2(2x+2) - (x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x^2+2x+1-x^2-2x)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{2x+2}{(x+1)^4}
\end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\begin{aligned}
f''(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq -1 \\
f''(x) < 0 &\Leftrightarrow x < -1
\end{aligned}$$

Daher ist die Funktion auf dem Intervall $(-\infty, -1)$ konkav und auf dem Intervall $[-1, \infty)$ konvex. Wegen

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x = x(x+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -2$$

und

$$f''(0) = 2 > 0,\; f''(-2) = -2 < 0$$

hat f bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = -2$ ein lokales Maximum.

(b) Nein, da es kein $x \in D(f)$ gibt mit $f'(x) = f''(x) = 0$.

(c) Es gilt

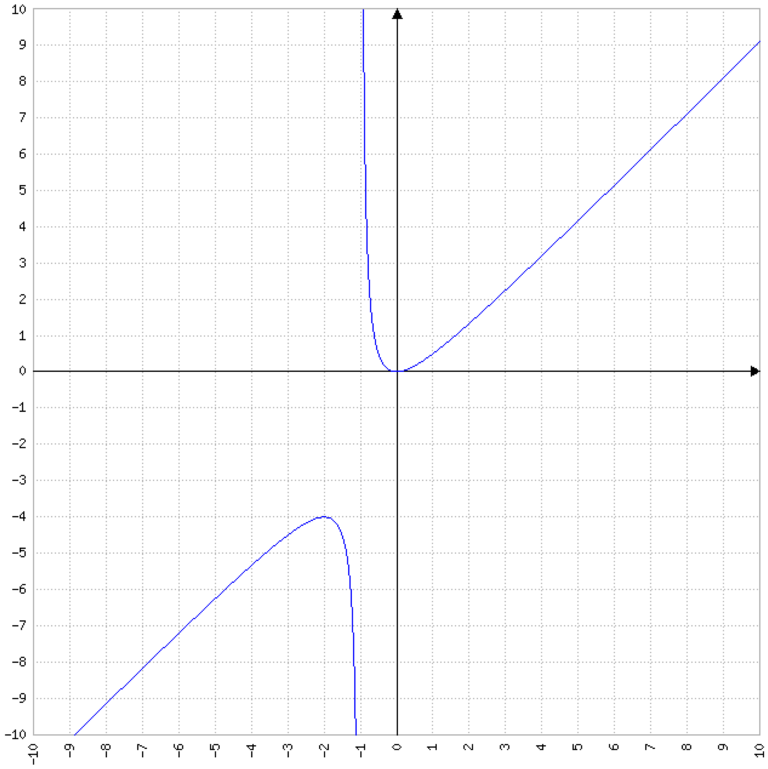
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\pm\infty}{1+0} = \pm\infty$$

(d) Da x^2 und $x+1$ stetig sind und $x+1>0$ für $x>-1$ und $x+1<0$ für $x<-1$, gilt

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

sowie

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$



(e)

Aufgabe 5 (3+3+4=10 Punkte)

Ermitteln Sie eine Stammfunktion:

(a)

$$\int x^2 \cos(x)\, dx$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(b)

$$\int_{-r}^{r} x^3 - x\, dx, \;\; r \in \mathbb{R}$$

Für welche r wird das bestimmte Integral gleich 0?
<u>Hinweis:</u> Sie können r rechnerisch bestimmen, müssen es aber nicht!

(c)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Musterlösung:

(a) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x)\, dx &= x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x)\, dx \\ &= x^2 \sin(x) - 2\left(x(-\cos(x)) + \int \cos(x)\, dx \right) \\ &= x^2 \sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + c \end{aligned}$$

(b) Da das Polynom $x^3 - x$ nur ungerade Exponenten besitzt, ist es ungerade. Aus Symmetriegründen gilt somit

$$\int_{-r}^{r} x^3 - x\, dx = 0$$

für alle $r \in \mathbb{R}$. Wer das nicht weiß, kann auch das bestimmte Integral lösen und gleich Null setzen:

$$\int_{-r}^{r} x^3 - x\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-r}^{r} = \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2 = 0$$

für alle $r \in \mathbb{R}$.

(c) Es handelt sich um ein unbestimmtes Integral. Substituiere $z(x) := -\sqrt{x}$. Dann gilt $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ und somit $dx = -2\sqrt{x}\,dz$. Somit gilt zunächst für das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{2e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{2e^{z}}{\sqrt{x}}(-2\sqrt{x})\,dz \\ &= -4\int e^{z}\,dz = -4e^{z} + c = -4e^{-\sqrt{x}} + c\end{aligned}$$

Sei $a > 0$. Dann gilt

$$\int_0^a \frac{2e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -4e^{-\sqrt{x}}\Big|_0^a = -4e^{-\sqrt{a}} + 4$$

Wegen

$$\lim_{a\to\infty} -4e^{-\sqrt{a}} + 4 = 0 + 4 = 4$$

existiert das unbestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 4$$

Aufgabe 6 ((1+2+3)+4=10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy^2 - x$$

(i) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

(ii) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,1)$ in Richtung des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte von f.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = (x^2 - 2x)\sin(y)$$

Zeigen Sie, daß g keine lokalen Extrema oder Sattelpunkte besitzt!

Musterlösung:

(a) (i)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und somit für die Richtungsableitung:

$$D_v f(x,y) = \left\langle \nabla f(1,1), \frac{v}{||v||} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

(iii) Bestimme zunächst die stationären Punkte von f. Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ y^2 - 1 = 0 \ \wedge\ 2xy = 0$$

Es gilt weiterhin $y^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 1 \ \vee y = -1$ und daher $2xy = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$. Also sind $(0,1)$ und $(0,-1)$ die einzigen stationären Punkte. Bestimme die Hesse-Matrix:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Setze $(0,1)$ ein:

$$D^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $\det(0) = 0$ und für den zweiten Hauptminor $\det(D^2 f(0,1)) = -4 < 0$. Da weder der Fall '$> >$' (Min.) noch '$< >$' (Max.) vorliegt und $\det(D^2 f(0,1)) \neq 0$ ist, ist $D^2 f(0,1)$ indefinit, und es liegt ein Sattelpunkt vor.

Setze $(0,-1)$ ein:

$$D^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den ersten Hauptminor gilt $\det(0) = 0$ und für den zweiten Hauptminor $\det(D^2 f(0,1)) = -4 < 0$. Aus denselben Gründen wie oben liegt auch hier ein Sattelpunkt vor.

(b) Für den Gradienten gilt

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} (2x-2)\sin(y) \\ (x^2-2x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Versuche, $\nabla g(x,y)$ gleich dem Nullvektor zu setzen:

$$\begin{aligned} (2x-2)\sin(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x-2 = 0 \ \vee \ \sin(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ y = 0 \\ (x^2-2x)\cos(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(x-2)\cos(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 2 \ \vee \ y = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Da es kein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $x = 1 \ \wedge \ (x = 0 \ \vee \ x = 2)$ und auch kein $y \in \mathbb{R}$ mit $y = 0 \wedge y = \frac{\pi}{2}$ (Hinweis zur Korrektur: Das muß nicht so ausführlich angegeben werden!), besitzt der Gradient von g keine Nullstelle, d.h., es liegen keine stationären Punkte vor. Somit kann g weder lokale Extrema noch Sattelpunkte besitzen.