**Hochschule Bonn-Rhein-Sieg**
*University of Applied Sciences*

Fachbereich Informatik
Prof. Dr. Peter Becker
Dr. Marco Hülsmann

# Analysis
## Übungsblatt 2
## Sommersemester 2024
## – Musterlösungen –

**Bitte auf jeden Fall einen Teil von Aufgabe 4 zur Vorbereitung auf den ersten ACAT-Test besprechen!**

### Aufgabe 1 (Beträge)

**a)** Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen erfüllt?

(i) $|7x - 4| < 2$

(ii) $|7x - 4| \geq 2$

(iii) $|5x + 3| \geq -1$

(iv) $||x - 5| - 3| \leq 4$

**b)** Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\max(\{x, y\}) = \dfrac{x + y + |y - x|}{2}$

(ii) $\min(\{x, y\}) = \dfrac{x + y - |y - x|}{2}$

**Musterlösung:**

**a)**

(i) Zeige also zunächst die erste Hilfsaussage: $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$$

für $a, c \in \mathbb{R}$.
<u>1. Fall:</u> $a \geq 0$. Dann gilt $|a| = a$, und die Ungleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn $a < c$.
<u>2. Fall:</u> $a < 0$. Dann gilt $|a| = -a$, und die Ungleichung ist somit genau

dann erfüllt, wenn $-a < c$, also $a > -c$.
Insgesamt ist die Ungleichung $|a| < c$ für alle $a \geq 0$ mit $a < c$ und für alle $a < 0$ mit $a > -c$ erfüllt, also für $-c < a < c$.

Wende dies nun auf die Ungleichung an:

$$\begin{aligned} |7x-4| &< 2 \\ \Leftrightarrow\ -2 < 7x-4 < 2 & \\ \Leftrightarrow\ 2 < 7x < 6 & \\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{7} < x < \frac{6}{7} & \end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung für $x \in \left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$ erfüllt.

(ii) Diese Ungleichung muß dann für $x$ aus der Komplementmenge

$$\left(-\infty, \frac{2}{7}\right] \cup \left[\frac{6}{7}, \infty\right)$$

erfüllt sein.

(iii) Beträge sind stets positiv, also insbesondere $\geq -1$. Also ist die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(iv) Hier muß eine Fallunterscheidung getroffen werden:

<u>1. Fall:</u> $x - 5 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 5$. Dann lautet die zulässige Menge

$$A_1 := [5, \infty)$$

Für $x \in A_1$ gilt $|x-5| = x-5$, und somit gilt:

$$\begin{aligned} ||x-5|-3| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ |x-5-3| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ |x-8| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ -4 \leq x-8 \leq 4 & \\ \Leftrightarrow\ 4 \leq x \leq 12 & \end{aligned}$$

Sei $\tilde{\mathbb{L}}_1 := [4, 12]$. Dann gilt für die Lösungsmenge des 1. Falls:

$$\mathbb{L}_1 := \tilde{\mathbb{L}}_1 \cap A_1 = [4, 12] \cap [5, \infty) = [5, 12]$$

<u>2. Fall:</u> $x - 5 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 5$. Dann lautet die zulässige Menge

$$A_2 := (-\infty, 5)$$

Für $x \in A_2$ gilt $|x-5| = -(x-5) = 5-x$, und somit gilt:

$$\begin{aligned} ||x-5|-3| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ |5-x-3| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ |2-x| &\leq 4 \\ \Leftrightarrow\ -4 \leq 2-x \leq 4 & \\ \Leftrightarrow\ -6 \leq -x \leq 2 & \\ \Leftrightarrow\ 6 \geq x \geq -2 & \end{aligned}$$

Sei $\tilde{\mathbb{L}}_2 := [-2, 6]$. Dann gilt für die Lösungsmenge des 2. Falls:

$$\mathbb{L}_2 := \tilde{\mathbb{L}}_2 \cap A_2 = [-2, 6] \cap (-\infty, 5) = [-2, 5)$$

Die Gesamtlösungsmenge der Ungleichung lautet

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [5, 12] \cup [-2, 5) = [-2, 12]$$

**b)**

(i) <u>1. Fall:</u> $x \geq y \ \Rightarrow\ \frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = x = \max(\{x, y\})$

<u>2. Fall:</u> $x < y \ \Rightarrow\ \frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y+(y-x)}{2} = y = \max(\{x, y\})$

(ii) <u>1. Fall:</u> $x \geq y \ \Rightarrow\ \frac{x+y-|y-x|}{2} = \frac{x+y+(y-x)}{2} = y = \min(\{x, y\})$

<u>2. Fall:</u> $x < y \ \Rightarrow\ \frac{x+y-|y-x|}{2} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = y = \min(\{x, y\})$

## Aufgabe 2 (Rechnen mit Potenzen und Wurzeln)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Für welche $n \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \sqrt{ab} \ ?$$

**Musterlösung:**

Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \frac{a^n \cdot a + b^n \cdot b}{a^n+b^n} = \sqrt{ab} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a^n \cdot a + b^n \cdot b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = a^n + b^n \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a^n \sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{b^n \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = a^n + b^n \\
\Leftrightarrow \quad & a^n - \frac{a^n \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{b^n \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - b^n \\
\Leftrightarrow \quad & a^n \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) = b^n \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & a^n \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = b^n \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a^n}{\sqrt{b}} = \frac{b^n}{\sqrt{a}} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & n = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Also ist die Gleichung nur für $n = -\frac{1}{2}$ erfüllt.

**Aufgabe 3 (Supremum/Infimum/Minimum/Maximum)**

**a)** Bestimmen Sie, falls existent, Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen:

(i) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid -5 + 2x \leq 5\}$

(ii) $B := \{x^2 + 4x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

(iii) $C := \left\{\frac{x-y}{x+y} \mid x > 0 \ \wedge \ y > 0\right\}$

(iv) $D := \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

**b)** Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, wobei $A$ nach oben und $B$ nach unten beschränkt ist. Widerlegen Sie die folgende Aussage durch ein Gegenbeispiel:

$$(\forall a \in A \ \forall b \in B : a < b) \Leftrightarrow \sup(A) < \inf(B)$$

**Musterlösung:**

**a)**

(i) Wegen

$$\begin{aligned} -5 + 2x &\leq 5 \\ \Leftrightarrow 2x &\leq 10 \\ \Leftrightarrow x &\leq 5 \end{aligned}$$

gilt $\sup(A) = 5$ und auch $\max(A) = 5$ (wegen $\leq$). Da $A$ nach unten unbeschränkt ist, existieren $\inf(A)$ und $\min(A)$ nicht.

(ii) Quadratische Ergänzung liefert

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 2 = (x+2)^2 - 2 \geq -2$$

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 2$ ist somit eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $(-2, -2)$. Wegen $f(-2) = -2$ gilt somit $\min(B) = \inf(B) = -2$. Nach oben ist die Menge unbeschränkt, also existieren $\sup(B)$ und $\max(B)$ nicht.

(iii) Wegen $y > 0$ gilt

$$\frac{x-y}{x+y} < \frac{x}{x+y} < \frac{x}{x} = 1$$

und wegen $x > 0$ gilt

$$\frac{x-y}{x+y} > -\frac{y}{x+y} > -\frac{y}{y} = -1$$

Da $x, y \in \mathbb{R}$, kann man der -1 bzw. der 1 zwar beliebig nahe kommen, man wird diese Zahlen jedoch niemals erreichen. Daher gilt $\sup(C) = 1$ und $\inf(C) = -1$, allerdings existieren Maximum und Minimum nicht.

(iv) $\sup(D) = \max(D) = \frac{3}{2}$ (für $n = 2$), $\inf(D) = -1$, Minimum existiert nicht.

**b)** Die Richtung "$\Rightarrow$" ist falsch. Für den Nachweis betrachten wir folgendes Beispiel: Seien $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$. Dann ist für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ die Aussage $a < 4 < b$ und somit $a < b$ erfüllt. Es gilt aber $\sup(A) = 4 = \inf(B)$ und somit $\sup(A) \not< \inf(B)$.

## Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen)

Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ jeweils $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_1|$, $|z_2|$ und $z_1 \cdot \bar{z}_2$.

**(i)** $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2$

**(ii)** $z_1 = -1$, $z_2 = 1 - 2i$

**(iii)** $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = -3 - 5i$

**(iv)** $z_1 = -\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$, $z_2 = -i\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

**Musterlösung:**

**(i)**

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 5 + 2i \\
z_1 - z_2 &= 1 + 2i \\
z_1 \cdot z_2 &= 6 + 4i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{2} + i \\
|z_1| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \\
|z_2| &= 2 \\
z_1 \cdot \bar{z}_2 &\overset{z_2 \in \mathbb{R}}{=} z_1 \cdot z_2 = 6 + 4i
\end{aligned}$$

**(ii)**

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= -2i \\
z_1 - z_2 &= -2 + 2i \\
z_1 \cdot z_2 &= -1 + 2i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{-1}{1 - 2i} = -\frac{1}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = -\frac{1 + 2i}{1 - 4i^2} = -\frac{1 + 2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\
|z_1| &= 1 \\
|z_2| &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\
z_1 \cdot \bar{z}_2 &= -1 \cdot (1 + 2i) = -1 - 2i
\end{aligned}$$

**(iii)**

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 1 - 3i \\
z_1 - z_2 &= 7 + 7i \\
z_1 \cdot z_2 &= (4+2i)(-3-5i) = -12 - 6i - 20i - 10i^2 = -12 - 26i + 10 = -2 - 26i \\
\frac{z_1}{z_2} &= -\frac{4+2i}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i} = -\frac{12 - 14i - 10i^2}{9 - 25i^2} = -\frac{22 - 14i}{34} = -\frac{11}{17} + \frac{7}{17}i \\
|z_1| &= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\
|z_2| &= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \\
z_1 \cdot \bar{z}_2 &= (4+2i)(-3+5i) = -12 + 14i + 10i^2 = -22 + 14i
\end{aligned}
$$

**(iv)**

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 2\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} \\
z_1 - z_2 &= -4\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\
z_1 \cdot z_2 &= (-\sqrt{2} - 2i\sqrt{2})(-i\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = 2i - 6 + 4i^2 - 12i = -10 - 10i \\
\frac{z_1}{z_2} &= -\frac{\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = -\frac{6 + 2i + 12i - 4}{18 + 2} = -\frac{2 + 14i}{20} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i \\
|z_1| &= \sqrt{2 + 8} = \sqrt{10} \\
|z_2| &= \sqrt{2 + 18} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\
z_1 \cdot \bar{z}_2 &= (-\sqrt{2} - 2i\sqrt{2})(i\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = -2i - 6 + 4 - 12i = -2 - 14i
\end{aligned}
$$